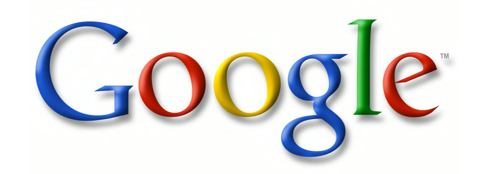



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

Neuere Darstellungen

der

Grundprobleme der reinen Mathematik

im Bereiche der Mittelschule

von

Dr. Alois Lanner
Professor an der Staats-Oberrealschule in Innsbruck.



Berlin.
Verlag von Otto Salle.
1907.

Neuere Darstellungen

der

Grundprobleme der reinen Mathematik

im Bereiche der Mittelschule

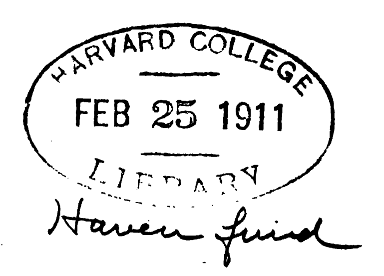
613

von

Dr. Alois Lanner
Professor an der Staats-Oberrealschule in Innsbruck.



Berlin.
Verlag von Otto Salle.
1907.



Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Vorwort.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß gerade die fundamentalen Probleme der Arithmetik wegen ihrer abstrakten Formulierung beim Unterrichte großen Schwierigkeiten begegnen, und dieser Umstand wird um so fühlbarer, als die Behandlung dieses Gegenstandes beim Mittelschüler noch in eine Zeit fällt, wo er in der formellen Behandlung logischer Schlußformen noch nicht jene Gewandtheit besitzt, wie sie wünschenswert wäre, um sich den Inhalt rasch und gut anzueignen. Auch eine sehr große Menge von Beispielen und Aufgaben vermag den theoretischen Unterricht nur insofern einigermaßen zu ersetzen, als ihrer Auswahl richtige theoretische Prinzipien zugrunde liegen. Die sprachliche Formulierung der gewonnenen Sätze bleibt aber auch dann noch unerläßlich.

Während sich jedoch die wissenschaftlichen Anschauungen über die Grundlagen der Arithmetik in jüngster Zeit nicht unwesentlich geändert haben, schlossen sich die für die Mittelschulen bestimmten Darstellungen diesen Neuerungen nicht durchweg an. Es erscheint daher wünschenswert, diese in vielen Fachzeitschriften zerstreut niedergelegten Anschauungen im Zusammenhang und so wiederzugeben, daß insbesondere der Mittelschüler auf glatter Bahn zuerst in das Verständnis der fundamentalen und dann der höheren Rechnungsoperationen eingeführt, daß der Zahlenbegriff korrekt entwickelt und naturgemäß erweitert werde und daß endlich die funktionelle Zuordnung, ihre Gesetzmäßigkeiten und Darstellungsformen eine zeitgemäße Behandlung finden.

Zu dieser auf eine Vertiefung des Lehrstoffes hinarbeitenden Forderung gesellt sich seit neuerer Zeit noch eine andere, welche auf eine namhafte Erweiterung des Lehrstoffes hinzielt. Man hat erkannt, daß die frühzeitige Kenntnis der Grundlehren der Infinitesimalrechnung nicht nur dem Universitätshörer einen großen Vorteil bietet, sondern auch für den angehenden Techniker, für den

Chemiker und Naturhistoriker, ja sogar auch für den Mediziner von Wichtigkeit ist, weil er dann so manche wissenschaftliche Abhandlung verfolgen kann, die ihm sonst verschlossen bleibt. Außerdem können in diesem Falle eine Reihe von Problemen der Geometrie und Physik, die der Mittelschule schon einverleibt sind, viel sachgemäßer erledigt werden.

Diese beiden Forderungen lassen sich kurz in die Worte zusammenfassen, daß derzeit fast allgemein einerseits ein engerer Anschluß des Mittelschulunterrichts an die Ergebnisse der wissenschaftlichen Forschung, andererseits eine Erweiterung des Lehrstoffes in das Gebiet der Funktionentheorie und Infinitesimalrechnung als erstrebenswert aufgefaßt wird.

Wir glauben diesen Forderungen am besten in der Weise gerecht zu werden, daß wir den Fachkreisen eine diesem Standpunkt Rechnung tragende Behandlung des arithmetischen Lehrstoffes vorlegen und fügen hier nur einleitend bei, in welchen Punkten diese Darstellung von den älteren Bearbeitungsformen abweicht.

Die Begriffe von Gleichheit, Größe, Menge und Zahl sind nicht so bekannt und einfach und doch allzu wichtig, als daß der Schüler in den Gebrauch derselben ohne sachlich korrekte und gründliche Erörterung eingeführt werden sollte. Die Ableitung der Zahl aus der Addition von Einheiten ist psychologisch nicht einwandfrei und vom wissenschaftlichen Standpunkt aus betrachtet sogar einseitig. Ihre Beziehung zu den einfachsten Operationen und deren Behandlung in der Volksschule hat der Verfasser in seiner Abhandlung: „Die wissenschaftlichen Grundlagen des ersten Rechenunterrichts (1905)“ auseinandergesetzt. Der Gebrauch der Zahlzeichen und noch mehr derjenige der Operationszeichen als Träger einer jahrhundertelangen Begriffsentwicklung ist sachlich und historisch wichtig und interessant genug, um im hohen Grade bildend zu wirken. Der Begriff der Addition wird vielfach als etwas allgemein Bekanntes einer kritisch genauen Formulierung kaum gewürdigt, und doch bietet gerade er die erste und wegen seiner Einfachheit auch die beste Gelegenheit dar, um den Schüler auf den in neuester Zeit als so wichtig anerkannten Begriff der „Zuordnung“ aufmerksam zu machen und ihm zu zeigen, wie aus der Art der Verknüpfung deren Gesetzmäßigkeiten abgeleitet werden können. Durch die Addition gelangen wir allerdings zu immer größeren Zahlen, aber es ist ein altes Vorurteil, dieselben notwendig als ein Er-

zeugnis der Addition aufzufassen. Sie sollen daher auch im Unterrichte nicht als solche eingeführt werden. Desgleichen kann der Begriff des Produktes wohl aus der Addition abgeleitet werden, aber es ist im Hinblick auf viele verwandte Begriffsbildungen besser, auch das Produkt zuerst unabhängig aufzustellen und erst dann seine Beziehung zur Addition zu erörtern. Das Rechnen mit negativen, und später mit gebrochenen Zahlen muß sich aus dem Rechnen mit algebraisch dargestellten Differenzen und Quotienten ergeben, wenn die angestrebte Permanenz der Rechengesetze nicht lediglich als Utilitätsprinzip erscheinen soll. In beiden Fällen müssen wir willkommene Gelegenheiten zur Einübung der Begriffsbildung erblicken, und gerade die „Bildung neuer Begriffe" ist der eigentliche Grundstein aller wissenschaftlich produktiven Tätigkeit und deshalb erzieherisch vom größten Wert. Das Rechnen mit systematisch dargestellten Zahlen und algebraischen Ausdrücken, die nach Potenzen einer einzigen Hauptgröße geordnet sind, ist nicht nur wegen seiner Verwendung zur Erklärung des Rechnungslogarithmus mit dekadischen Zahlen von Wichtigkeit, es ist auch die notwendige Voraussetzung für das Verständnis der Division algebraischer Ausdrücke und enthält gewissermaßen den Keim zum Rechnen mit Potenzreihen.

Als ein Gebiet, das besonderer Beachtung würdig und wert ist, muß das Rechnen mit unvollständigen Zahlen aufgefaßt werden. Dabei handelt es sich zunächst allerdings um die sichere und rasche Beurteilung der im Resultat anzustrebenden Genauigkeit. Es ist aber ebenso einseitig, die Fehlergrenze ganz zu ignorieren, wie es andererseits unzweckmäßig ist, bei ganz einfachen Beispielen deshalb umfangreiche Nebenrechnungen und komplizierte Formeln heranzuziehen. An dieses Kapitel schließt sich naturgemäß die Lehre von den irrationalen Zahlen und die Grenzwertbestimmung, deren gründliches Erfassen die unerläßliche Vorbedingung für den wissenschaftlich korrekten Aufbau der Grundlehren der Infinitesimalrechnung bildet. Nur diese Entwicklungsart vermeidet die auch durch geometrische Anschauungsmittel nicht zu umgehenden und noch vielfach verbreiteten Unklarheiten im Gebrauch der sogenannten „unendlich kleinen Größen". Auch die Verwandlung von rein- und gemischtperiodischen Dezimalbrüchen soll als eine Grenzwertbestimmung vorgeführt werden.

Die Funktionentheorie läßt sich in natürlichster Form so ein-

führen, daß man von einer systematisch dargestellten Zahl ausgeht, deren Grundzahl veränderlich ist. Verallgemeinerungen auf den n-ten Grad sind auf dieser Lehrstufe von geringerer Wichtigkeit und belasten anfangs zu sehr die Schreibtätigkeit. Wenden wir auf solche Ausdrücke die über die Grenzwerte aufgestellten Lehrsätze an, so gelangen wir nicht nur zu einer einwandfreien, sondern auch dem Schüler leicht begreiflichen Behandlung der Differentialquotienten und der einfachsten Lehrsätze über das Differenzieren. Das Integrieren wird allerdings zunächst am bequemsten als Umkehrung der Differenzierung eingeführt, dabei darf man sich aber in der Mittelschule nicht dazu verleiten lassen, diese Operation auch auf solche Funktionen auszudehnen, welche für den Durchschnittsschüler nicht naheliegend sind. Nicht das Differenzieren und Integrieren der einzelnen Funktionen sei hier Gegenstand des Unterrichtes, sondern die klare Erkenntnis dessen, was sich durch diese Operationen erreichen läßt. Nicht das arithmetisch verfängliche Problem „eine Summe aus unendlich vielen, aber unendlich kleinen Summanden zu berechnen“ sei das Ziel, sondern vielmehr die Gesamtzunahme einer Funktion festzustellen, von der wir zwar die Änderungsgeschwindigkeit, aber nicht notwendig den absoluten Wert kennen. Wenn der Schüler den Inhalt dieses Problems als solchen erfaßt hat, dann weiß er, was er in einem gegebenen Falle von der Integration zu erwarten hat, und wenn er beim Durchlesen einer Abhandlung auf ein Integral stößt, dessen Berechnung ihm auch nicht gleich gelingt, so wird er doch den Zweck der damit angestrebten Rechnung erkennen und davon Nutzen ziehen. Übrigens ist auch der Umstand zu beachten, daß der Schüler mit diesem Begriff nicht erst am Abschluß seiner mathematischen Studien in der Mittelschule vertraut werden darf, wenn die einschlägigen Gebiete der Geometrie damit wesentlich gefördert werden sollen. Aus diesem Grunde wurde das Kapitel über Infinitesimalrechnung an dieser und nicht an späterer Stelle eingeschaltet.

Die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen führt uns in das Rechnungsgebiet des Altertums und Mittelalters zurück, von dessen Formelkram wir noch heutzutage mehr als es notwendig wäre, beherrscht werden. Daher soll der Schüler diesen Gegenstand mehr von der historischen Seite kennen lernen. Bei den Gleichungen wird selten gezeigt, warum die zur Auflösung so vielfach verwendeten Transformationen zulässig sind. Auch die Lehre

von den Operationen dritter Stufe läßt eine modernere Behandlung zu. Das Wurzelzeichen ist seinem ganzen Aufbau nach eine Inkonsequenz. Es dürfte heutzutage noch kaum ratsam sein, dagegen anzukämpfen, obwohl die ausschließliche Verwendung von Exponenten in jeder Hinsicht vorzuziehen wäre. Der Gebrauch der Logarithmen hat sich historisch nicht aus der Potenzlehre entwickelt, wie es nach der jetzt allgemein gebräuchlichen Darstellungsform scheinen möchte, und die mühsame Art, wie das so vorteilhafte Rechnen mit Logarithmen errungen wurde, soll der Schüler wenigstens dankbar zur Kenntnis nehmen. Die Übung im Gebrauch des Logarithmenschiebers wäre auch sehr empfehlenswert. Die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Potenz- und Exponentialfunktion fördert nicht nur das Verständnis für deren Anwendungen, sie gibt auch einen viel tieferen Einblick in die gegenseitige Beziehung der Operationen dritter Stufe, und die Bekanntschaft mit dem Grenzwerte $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ und seiner Anwendung ist ebenfalls sehr wichtig. Hier kann man auch auf einen charakteristischen Zug der neueren Funktionentheorie hinweisen, nämlich die Bestimmung einer Funktion aus ihren charakteristischen Eigenschaften.

Die Lehre von den komplexen Zahlen erweckt insofern besonderes Interesse, als sie eine letzte Verallgemeinerung des Zahlbegriffes darstellt, die mehreren wichtigen arithmetischen und geometrischen Problemen den Charakter größerer Allgemeinheit verleiht.

Die Lehre von den quadratischen und höheren Gleichungen möge nicht den Zweck verfolgen, möglichst viele und gerade die schwierigsten Aufgaben zu lösen, sondern sie soll sich damit begnügen, die typisch interessanten Fälle in den Vordergrund zu stellen. Der allgemeinsten aller Lösungsformen, nämlich derjenigen auf dem Wege der Annäherung kommt in der Praxis eine viel größere Wichtigkeit zu, als mancher mathematisch exakten Lösung. Die hinsichtlich ihrer Anwendung vielfach überschätzten „unbestimmten Gleichungen“ gehören streng genommen in das Gebiet der Zahlentheorie und werden am besten von diesem Standpunkte aus behandelt.

Die arithmetischen und geometrischen Reihen geben Anlaß, jene Begriffe zu erörtern, die später in der Theorie der unendlichen Reihen eine große Rolle spielen und gestatten neuerdings die Grenzwertbestimmungen gebührend in den Vordergrund zu stellen.

Das Schlußkapitel bildet die „politische Arithmetik" ungefähr in dem Sinne, wie sie in M. Cantors bekannter Schrift unter diesem Namen viel ausführlicher behandelt wird. Sie macht den Schüler mit einer Reihe von Aufgaben vertraut, die für das moderne Verkehrsleben sehr wichtig sind.

Das sind die hauptsächlichsten Züge, in welchen dieses Buch von den älteren Darstellungsformen abweicht. In diesen Punkten soll der Mittelschüler dem Ideenkreis der neueren mathematischen Literatur nähergebracht werden. War uns für die theoretischen Grundlagen der Arithmetik und Infinitesimalrechnung die Weierstrassische Schule nach den von Professor Otto Stolz in seinen Vorlesungen und Abhandlungen vertretenen Ansichten in erster Linie maßgebend, so glaubten wir andererseits in der Fassung der Lehrsätze überall jenen Darstellungsformen den Vorzug geben zu sollen, die an bewährte Traditionen anknüpfen und den historischen Entwicklungsgang des mathematischen Unterrichts noch gut erkennen lassen.

Dr. Al. Lanner.

Gleichheit und Größe.

Wenn wir mehrere Gegenstände oder Vorgänge derselben Art miteinander „vergleichen", so pflegen wir auch auf ihre „Größe" zu achten. In diesem Sinne machen wir einen Unterschied zwischen einem großen und einem kleinen Hause, zwischen hoher und niederer Temperatur, zwischen einem langen und kurzen Weg, zwischen starkem und schwachem Wind usw. Um die Gleichheit der Größe zweier Dinge festzustellen, genügt es aber nicht, sich auf eine beliebige Eigenschaft zu berufen. Die Regel, auf Grund deren wir die „Gleichheit" aussprechen dürfen, muß folgendermaßen beschaffen sein:

1. Jedes verglichene Ding muß nach der Vergleichungsregel als „sich selbst gleich" erscheinen. $a = a$.

Wenn wir behaupten würden, zwei Ziegelsteine seien einander gleich, wenn die vertikalen Kanten des einen den vertikalen Kanten des andern gleich sind, so wäre das eine unzulässige Vergleichung, weil dann ein und derselbe Ziegelstein nicht mehr als „sich selbst gleich" gelten könnte, falls wir ihn nach der ersten Messung um eine horizontale Kante umlegen. Wenn wir dagegen sagen, zwei Ziegelsteine sind gleich, wenn sie in dieselbe hohle Form hineinpassen, so ist die verlangte Bedingung erfüllt, weil derselbe Ziegelstein immer wieder in dieselbe Form gelegt werden kann, wenn dies einmal der Fall war.

2. Der Vergleichungsregel zufolge müssen irgend zwei vergleichbare Dinge entweder gleich oder ungleich sein und im letzteren Fall muß sich feststellen lassen, welcher von beiden als größer zu gelten hat. Entweder $a = b$ **oder** $a \gtrless b$.

Würden wir sagen, zwei Rechtecke sind einander gleich, wenn sie nur gleiche Grundlinien haben, so wäre diese Regel unbrauchbar, denn zwei Rechtecke, deren Grundlinien zwar gleich, deren Höhen aber verschieden sind, wären einander gleich und doch wieder ungleich, je nachdem man die eine oder die andere von zwei anstoßenden Seiten als Grundlinie betrachtet. Zwei Kreise sind dagegen wirklich einander gleich, wenn ihre Halbmesser gleich lang sind, denn sie lassen sich unter dieser und nur unter dieser Bedingung zur Deckung bringen. Andererseits ist derjenige Kreis größer, dessen Halbmesser größer ist.

3. Sind der Gleichheitsregel zufolge zwei Größen einer dritten gleich, so müssen sie derselben zufolge auch untereinander gleich sein. Wenn $a = c$ und $b = c$, so muß auch $a = b$ sein. Wenn aber $a > b$ und $b > c$, so muß nach derselben Regel $a > c$ sein.

Die Schüler A und B erfahren, daß sie zugleich mit dem Schüler C heute ihren Geburtstag feiern. Sie glauben daher gleich alt zu sein. A kann aber um ein Jahr älter als B sein. Diese Vergleichung ist unbrauchbar, weil Monat und Tag nicht hinreichen, um das Alter zu bestimmen, es muß auch das Jahr angegeben werden. Im März ist die mittlere Temperatur höher als im Februar und im April höher als im März. Trotzdem finden wir an einem Apriltage einmal eine niedrigere Temperatur als an einem Tage im Februar. Die Behauptung, daß dies nach der obigen Regel nicht möglich sei, wäre unrichtig, denn die mittlere Temperatur eines einzelnen Tages muß nicht unbedingt der mittleren Monatstemperatur entsprechen, sondern sie hängt auch von anderen Witterungsverhältnissen ab. Wenn dagegen das Thermometer steigt, falls wir es vom Wasser im Gefäße A in das des Gefäßes B geben, und wenn es wieder steigt, wenn wir es von hier weg in das Wasser des Gefäßes C geben, so können wir mit Sicherheit erwarten, daß es auch steigt, wenn wir es aus dem Wasser in A nehmen und in das Wasser in C geben. Daher dürfen wir die Temperatur nach dem Stande des Thermometers beurteilen.

Besteht für irgend eine Art von Dingen oder Vorgängen eine diesen Anforderungen entsprechende Regel, der zufolge ihre Gleichheit oder Ungleichheit festgestellt werden kann, so bezeichnet man sie in der Mathematik als „Größen".

Unter „Größen" versteht man daher solche Gegenstände oder Vorgänge, die durch eine Gleichheits- und Ungleichheitserklärung mit anderen Gegenständen und Vorgängen derselben Art in Zusammenhang stehen.

Die natürlichen Zahlen.

In einer Gesellschaft uns wohlbekannter Persönlichkeiten erkennen wir ohne zu „zählen" alsbald, ob ein Mitglied derselben abwesend oder ein Fremder in dieselbe eingetreten ist. Erst wenn wir z. B. jedem Mitgliede eine Karte verschaffen sollen, pflegen wir die Teilnehmer zu „zählen". Wir stellen dabei der Vielheit von Personen eine Vielheit von Karten gegenüber, die ihr „gleich" ist. Damit wird die „Vielheit" oder „Menge" zur „Größe". Die Gleichheitsregel besteht in diesem Falle darin, daß beim Verteilen der Karten an die Personen keine Karte übrig bleibt und niemand in

der Gesellschaft leer ausgehe, falls jede Person eine einzige Karte erhält. Diese Gleichheitsregel hat alle erforderlichen Eigenschaften, denn 1. stimmt dieselbe Menge von Karten mit der Menge der Personen immer überein, wie oft wir sie auch verteilen mögen. Sie ist also sich selbst gleich. 2. Das Übrigbleiben einer oder mehrerer Karten und der Fall, daß mehrere Mitglieder leer ausgehen, schließt die Gleichheit vollständig aus. 3. Wenn wir einmal weiße Karten und ein anderes Mal grüne verteilen und es stellt sich in beiden Fällen Gleichheit heraus, so können wir auch auf jede weiße Karte eine grüne Karte legen, ohne daß weder eine weiße oder eine grüne Karte übrig bleibt. Wir haben also ebensoviele weiße Karten wie grüne, weil die Zahl beider Kartenmengen einer dritten Menge, nämlich der Zahl der Personen, gleich ist.

Wenn wir demnach eine Vielheit oder Menge mit einer anderen vergleichen, indem wir die einzelnen Glieder derselben paarweise zusammenstellen und sehen, ob von der einen oder von der anderen ein Rest übrig bleibt, so wird damit die Menge oder Vielheit zur „Zahl" im mathematischen Sinne. Die einzelnen Glieder bezeichnen wir im Gegensatze zur Vielheit als „Einheiten". Daraus ergeben sich die Grundsätze:

Zwei Vielheiten oder Mengen sind einander gleich, wenn von beiden kein Glied übrig bleibt, falls wir je ein Glied der einen einem Glied der zweiten zuordnen. Bleiben von der einen Menge ein oder mehrere Glieder übrig, so bezeichnen wir diese als die größere.

Für die niedrigsten Vielheiten hat die Sprache eigene Wörter, die „Zahlwörter". Wenn wir dieselben in der Reihenfolge der Größe der entsprechenden Mengen hersagen, oder mit den bekannten Zeichen aufschreiben, so bilden diese Sprach- und Schriftzeichen eine „geordnete" Vielheit, die sich mit jeder anderen nach der angegebenen Regel vergleichen läßt. Ordnen wir so den Einheiten einer Menge Glied für Glied die aufeinander folgenden Zahlwörter zu, so erfahren wir, bis zu welchem Gliede dieser Zahlenreihe wir fortschreiten müssen, um eine gleiche Menge von Zahlzeichen zu erhalten. Das Endglied der Zahlenreihe gibt uns daher die Zahl der Einheiten jener Menge an, die wir auf diese Weise gezählt haben. Wenn wir beim Abzählen der Einheiten einer Menge die Reihenfolge der zu zählenden Einheiten verändern, so gelangen wir schließlich doch immer zur gleichen Schlußzahl. Die „Zahl" der in einer Menge enthaltenen Einheiten ist also von der Anordnung ihrer Einheiten unabhängig. Die in dieser Weise durch „Zählen" gewonnenen Zahlen bezeichnet man als „natürliche Zahlen".

Jede „natürliche Zahl“ ist also der Ausdruck jener Vielheit von unbenannten Einheiten, die irgend einer anderen Vielheit gleich ist.

Die Zahlzeichen und Operationszeichen.

Dem altägyptischen Rechenbuch des Ahmes, das aus der Zeit zwischen dem 17. und 20. Jahrhundert v. Chr. stammen dürfte, können wir entnehmen, wie schon damals gewisse häufig wiederkehrende Aufgaben nach bestimmten Regeln gelöst wurden. Diese sind aber nur so wiedergegeben, daß die beim „Kopfrechnen“ verwendeten Ausdrucksweisen wörtlich angeführt werden. Im Gegensatz zu dieser primitiven Darstellung verwendeten die Inder schon frühzeitig für jede der niedrigeren Zahlen ein eigenes Zeichen, ähnlich wie wir die Ziffern benützen. Die uns kulturell näherstehenden Griechen bedienten sich in ähnlicher Weise der Buchstaben des kleinen Alphabets, und zwar der ersten zehn für die Zahlen von 1 bis 10, die folgenden zehn bedeuteten die Zehner, also 10, 20, 30 usw. Wesentlich anders gingen die alten Römer vor, deren Zahlzeichen eine eigenartige Mischung der verschiedensten Grundsätze im Zahlenanschreiben aufweisen. Die einfachste und natürlichste Form der Zahlzeichen ist entschieden die, daß man so viele Striche macht, als Einheiten gezählt werden sollen. Dieser Auffassung entsprechen die noch heutzutage gebräuchlichen römischen Ziffern I, II, III und IIII, wie man sie auf den Zifferblättern vieler Uhren trifft. Bei größeren Zahlen wird diese Darstellung offenbar unbequem und es stellt sich daher bald das Bedürfnis ein, eine gewisse Gruppe von Strichen zusammenzufassen. So entstand ein anderes sehr einfaches Zahlzeichen, nämlich die beiden gekreuzten Striche in der Form eines X als Zeichen für 10 und die Hälfte dieses Zeichens V als Zeichen für 5. Das Zeichen L bedeutet 50. C ist eine Abkürzung des Wortes „centum“ und M die von „mille“, wofür auch ein Zeichen von der Form CIↃ verwendet wurde. Ein Teil der letzteren IↃ ging mit der Zeit in die Form von D über, weshalb dieser Buchstabe die Bedeutung der Hälfte von 1000, also von 500 erhielt. Neben dem Strichsystem und der Abkürzung entsprechender Zahlwörter kommt aber bei den römischen Zahlzeichen noch folgender Grundsatz zur Geltung. Um eine größere Zahl anzuschreiben, setzte man links zuerst die höchsten Zahlzeichen und nach rechts fortschreitend immer niedrigere, wenn dieselben zu den früheren addiert werden sollen. Wenn dagegen ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren steht, so muß sein Wert von

dem des höheren Zeichens subtrahiert werden. IV bedeutet 4, aber VI bedeutet 6; IX = 9, aber XI = 11, XL = 40 und XC = 90 usw. Die **Stellung** einzelner Zeichen gibt also der Gesamtzahl einen anderen Wert. Diesen Grundsatz haben die Inder in einer anderen Weise, und zwar vollkommen konsequent durchgeführt. Das von ihnen erfundene **Stellen- oder Positionssystem** bildet die Grundlage unseres Zahlensystems, aber sowohl die Ziffernzeichen, wie auch das Positionssystem kam erst durch die Vermittlung arabischer Mathematiker im Abendland in Gebrauch, und deshalb bezeichnet man die bei uns gebräuchlichen Ziffern noch jetzt als „arabische". Viel wichtiger als für das Zahlenanschreiben war ihr Einfluß auf die Entwicklung gut brauchbarer Rechnungsmethoden, deren Anwendung allerdings wieder von der Anschreibeweise größerer Zahlen abhängt. Seit den ältesten Zeiten rechnete man, wenn wir von der Geometrie absehen, fast ausschließlich mit indischen, bzw. arabischen und römischen Zahlzeichen, also immer mit besonderen Zahlen, und die Operationen, die mit denselben vorgenommen wurden, mußte man aus der Aufgabe oder aus der in den Schulen gebräuchlichen Reihenfolge der angeschriebenen Zahlen ermitteln. Nur in einzelnen Fällen finden wir bei griechischen Mathematikern, z. B. auch bei Euklid die Buchstaben in der Weise verwertet, daß sie nicht eine ziffernmäßig bestimmte, sondern eine solche Zahl bedeuten, der wir verschiedene Werte beilegen können. Der erste hervorragende Mathematiker, der sich regelmäßig der Buchstaben, und zwar der großen lateinischen Buchstaben bediente, um irgendwelche nicht näher angegebene, also sogenannte „allgemeine" Zahlen zur Lösung von Aufgaben verwendete, war der französische Mathematiker Vieta in Paris (1540—1603), und der Engländer Harriot in Oxford (1560 bis 1622) führte an Stelle der großen die kleinen lateinischen Buchstaben ein. Nur in einem Falle, wo es sich darum handelt, den Wert einer vorerst unbekannten Zahl aus ihren Beziehungen zu bekannten Zahlwerten zu ermitteln, oder wie wir jetzt sagen, eine Gleichung aufzulösen, pflegte man die „Unbekannte" mit einem eigenen Zeichen zu versehen und mit demselben wie mit einer „bekannten" besonderen Zahl zu rechnen. Man nannte diese Unbekannte im Lateinischen einfach „res" und in der italienischen Sprache „cosa". Aus diesem dem x ähnlichen Zeichen entwickelte sich der Gebrauch des x als Zeichen einer vorläufig unbestimmten oder unbekannten Zahl. Die ersten deutschen Mathematiker, die sich diesen Rechnungsvorteil aneigneten, bezeichneten solche Rechnungsformen als die „Coß-Regeln" und zugleich traten auch die ersten Operationszeichen + und — auf. Die ersten hervorragenden

deutschen „Coßisten" waren Johann Widmann von Eger, Michael Stifel in Jena, Christoph Rudolff aus Jauer und Adam Riese in Annaberg, die insgesamt um die Wende des 15. und 16. Jahrhunderts lebten. Stifel hatte die Buchstaben 𝔐 und 𝔇 als Operationszeichen für die Multiplikation und Division in Vorschlag gebracht, aber an Stelle des ersteren kam zuerst das vom Engländer Ouchtred eingeführte liegende Kreuz $\times$ und später auf Anregung des großen Mathematikers und Philosophen Leibniz (1646—1716) der einfache Punkt als Multiplikationszeichen in Gebrauch. Zugleich kommt es auch vor, daß das Multiplikationszeichen ganz weggelassen und die Faktoren unmittelbar aneinandergereiht werden, wie es vor der Verwendung der Operationszeichen üblich war. Zur Bezeichnung der Division wird noch heute der schon bei Leonardo Fibonacci von Pisa in seinem 1202 erschienenen „liber abaci" vorkommende Bruchstrich verwendet, an dessen Stelle Leibniz mitunter den Doppelpunkt setzte. Das Gleichheitszeichen stammt vom englischen Arzte Recorde (1510—1558); es fand aber erst in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts allgemeine Verbreitung. Vorher wurde die Gleichheit meistens nur in Worten ausgedrückt. Die Zeichen $>$ und $<$ stammen von dem schon oben erwähnten Harriot. Die Klammern gingen aus dem Wurzelhaken hervor und wurden noch vom großen englischen Mathematiker und Physiker Newton 1643—1727 in Gestalt eines über den einzuklammernden Ausdruck gezogenen Striches angeschrieben, während Leibniz bereits wie wir runde Klammern verwendete.

Die Addition der natürlichen Zahlen.

Sollen wir eine Zahl s bestimmen, die einer uns bekannten Zahl n gleich ist, so muß sie so viele Einheiten enthalten, daß sich dieselben paarweise mit den Einheiten von n zusammenstellen lassen, ohne daß von der einen oder anderen Zahl Einheiten übrig bleiben. Bedeuten a und b zwei uns bekannte natürliche Zahlen und haben wir eine Zahl s gefunden, deren Einheiten hinreichen, um sowohl mit den Einheiten von a, und noch mit denen von b paarweise verknüpft zu werden, ohne daß eine Einheit unbesetzt bleibt, so bezeichnen wir s als die **Summe** und die Bestimmung dieser Zahl als **Addition** von a und b. Dies drücken wir durch die Zeichen aus

$$a + b = s$$

und sagen:

Eine natürliche Zahl s ist gleich der Summe $(a + b)$ zweier natürlicher Zahlen (a und b), wenn sie aus so vielen Einheiten

besteht, um sowohl jeder Einheit des einen (a) wie auch jeder Einheit des anderen Summanden (b) eine ihrer Einheiten zuordnen zu können, ohne daß beiderseits ein Rest übrig bleibt.

Das Wort „Summe" hatte ursprünglich den Sinn wie „Schlußzahl" oder „Resultat". Daher spricht Leonardo von Pisa auch von einer Summe der Multiplikation oder der Division. Jetzt gebraucht man aber diesen Ausdruck nur mehr für das Resultat der Addition. Die Zahlen, welche zu einer Summe vereinigt werden, nennt man **Summanden, Addenden** oder **Posten.**

Die Summe ist größer als ein Summand. $s = a + b > a$. Wenn wir nämlich die Einheiten von $s = a + b$ paarweise mit denen von a allein zusammenstellen, so bleiben offenbar so viele Einheiten übrig, als b enthält; wir haben aber von zwei Mengen diejenige als die größere bezeichnet, von der bei der Vergleichung eine oder mehrere Einheiten übrig bleiben.

Die Summe ist kommutativ. $s = a + b = b + a$, d. h. der Wert der Summe ändert sich nicht, wenn man auch die Reihenfolge der Summanden vertauscht. Bilden wir nämlich zuerst die Summe $s_1 = a + b$ und dann die Summe $s_2 = b + a$, so läßt sich zeigen, daß $s_1 = s_2$, denn wir können die Einheiten von s_1 mit denen von s_2 paarweise zusammenstellen, ohne daß von einer der beiden Zahlen eine oder mehrere Einheiten übrig bleiben, weil durch die Veränderung der Reihenfolge der in a und b enthaltenen Einheiten weder eine hinzukommt noch verloren geht.

Die Summe ist assoziativ. $s = (a + b) + c = a + (b + c)$, d. h. der Wert der Summe ändert sich nicht, ob wir zuerst von drei Summanden die beiden ersten addieren und zum Resultat die dritte, oder ob wir zum ersten Summand die Summe aus dem zweiten und dritten addieren. Ist nämlich $s_1 = (a + b) + c$ und $s_2 = a + (b + c)$, so lassen sich wieder die Einheiten dieser beiden Zahlen paarweise zusammenstellen, ohne daß eine oder mehrere derselben übrig blieben, weil auch durch die verschiedene Gruppierung der Summanden keine Einheit hinzukommt oder wegfällt.

Wenn man gleiche Zahlen zu gleichen Zahlen addiert, so erhält man wieder einander gleiche Zahlen. Aus $a = b$ und $c = d$ folgt $a + c = b + d$. Wenn sich die Einheiten von a und b paarweise zusammenstellen lassen und ebenso auch die von c und d, so gibt die Zusammenstellung der Summen $a + c$ und $b + d$ dieselben Einheitspaare wie früher und daher bleiben auch im letzteren Falle auf keiner Seite Einheiten übrig.

Wenn man eine größere Zahl zu gleichen Zahlen addiert, so erhält man eine größere Zahl. Wenn $a = b$ und $c > d$, so ist

$a+c>b+d$. Ist nämlich $c>d$, so bleiben bei der paarweisen Verknüpfung je zweier Elemente einige oder wenigstens eine Einheit von c übrig. Stellen wir also die Einheiten von $a+c$ mit denen von $b+d$ zusammen, so müssen von ersterer Zahl ebensoviele Einheiten übrig bleiben wie früher von c.

Größere Zahlen zu größeren Zahlen addiert, geben größere Zahlen. Aus $a>b$ und $c>d$ folgt $a+c>b+d$. Die Summe $a+c$ wird nämlich nicht nur den Überschuß von a über b, sondern auch den von c über d enthalten. Ist dagegen $a>b$ und $c<d$, so läßt sich so lange nicht feststellen, ob $a+c$ oder $b+d$ größer ist, als wir nicht wissen, ob der Überschuß von a über b oder der von c über d größer ist.

Die Multiplikation mit natürlichen Zahlen.

Wir bezeichnen 7 als die Summe der Zahlen 3 und 4, weil die in 7 enthaltenen Einheiten eben hinreichen, um mit den Einheiten der Summanden paarweise verknüpft zu werden. Aus den beiden Zahlen 3 und 4 können wir aber noch in anderer Weise eine neue Zahl ableiten. Wir bilden 3 Gruppen, deren jede so viele Einheiten enthält wie die Zahl 4, also die Gruppen (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1) und (1, 1, 1, 1) und lösen dann diese Gruppen auf, um die in ihnen enthaltenen Einheiten zu zählen, deren wir hier 12 vorfinden. Jede in dieser Weise aus zwei Zahlen a und b abgeleitete neue Zahl nennen wir „Produkt" und bezeichnen sie mit $a \cdot b$ oder ab. Die Zahl der Einheiten in jeder Gruppe nennen wir „Multiplikand", die Zahl der Gruppen „Multiplikator". Diese beiden Zahlen werden auch „Faktoren" genannt, der eine derselben gibt also die **Zahl**, der andere die **Stärke** der Gruppen an.

Wir sagen daher:

Eine natürliche Zahl (p) ist gleich dem Produkte ($a \cdot b$) zweier natürlicher Zahlen (a und b), wenn sie so viele Einheiten enthält, um jeder Einheit des einen Faktors (a) so viele Einheiten zuzuordnen, als der andere Faktor (b) Einheiten besitzt, ohne daß beiderseits ein Rest übrig bleibt.

Ist einer von beiden Faktoren gleich 1, so ist das Produkt gleich dem anderen Faktor $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Ist der Multiplikand gleich 1 und enthält daher jede Gruppe eine einzige Einheit, so ist die Summe aller Gruppen gleich der Anzahl der Gruppen und daher das Produkt gleich dem Multiplikator. Besteht dagegen das Produkt aus einer einzigen Gruppe, so bildet die

Zahl der in derselben auftretenden Einheiten zugleich den Multiplikand und das Produkt.

Das Produkt ist kommutativ. $a \cdot b = b \cdot a$.

Ist $p_1 = a \cdot b$ und $p_2 = b \cdot a$, so ist $p_1 = p_2$. Da alle Gruppen eines Produktes gleich viele Einheiten enthalten, so können wir die ersten Einheiten jeder Gruppe, dann die zweiten, die dritten usw. zu einer neuen Gruppe vereinigen, wobei alle Gruppen gleichzeitig erschöpft werden. Wir erhalten dadurch sicher ebensoviele neue Gruppen als früher Einheiten in jeder Gruppe vorhanden waren und damit geht das Produkt $a \cdot b$ in $b \cdot a$ über, ohne daß eine Einheit zu p_1 hinzugefügt oder weggenommen wird, um p_2 zu erhalten.

Das Produkt ist assoziativ. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Das Produkt $p_1 = (a \cdot b) \cdot c$ besteht aus Gruppen mit c Einheiten und das Produkt $p_2 = a \cdot (b \cdot c)$ aus Gruppen mit $b \cdot c$ Einheiten. Letztere lassen sich daher in b kleinere Gruppen von je c Elementen zerlegen und es ist $p_1 = p_2$, wenn beide Produkte aus gleich vielen Gruppen von der Stärke c bestehen. Das ist auch der Fall, denn im ersten Produkt kommen $a \cdot b$ solche Gruppen vor, im zweiten wird die ursprüngliche Zahl der Gruppen a durch deren Teilung b-mal vergrößert und erreicht daher ebenfalls die Zahl $a \cdot b$.

Gleiche Zahlen geben mit gleichen Faktoren multipliziert gleiche Produkte. Wenn $a = b$ und $c = d$, so ist $ac = bd$.

In beiden Produkten lassen sich nämlich wegen der Gleichheit der Faktoren nicht nur die Einheiten der einzelnen Gruppen, sondern auch die Gruppen selbst paarweise ohne Rest verknüpfen.

Wenn man die eine von zwei gleichen Zahlen mit einer größeren Zahl multipliziert, so erhält man ein größeres Produkt und ebenso auch dann, wenn man die größere von zwei Zahlen mit einer größeren Zahl multipliziert.

Aus $a = b$ und $c > d$ folgt $ac > bd$ und aus $a > b$ und $c > d$ folgt $ac > bd$.

Im ersten Fall haben zwar die beiden Produkte die gleiche Anzahl von Gruppen, aber die Gruppen des ersteren Produktes sind größer und daher bleibt bei der Vergleichung der Gruppen in jeder derselben wenigstens eine Einheit übrig. In letzterem Fall enthält das erste Produkt nicht nur mehr, sondern auch stärkere Gruppen und es bleiben deshalb bei der paarweisen Zuordnung der Elemente nicht nur ganze Gruppen des ersten Produktes, sondern auch Elemente von jeder Gruppe übrig.

Jedes Produkt zweier Faktoren ist gleich der Summe so vieler Summanden, deren jeder gleich dem einen Faktor ist, als der andere Faktor Einheiten enthält.

Dies ergibt sich aus der Bedeutung der Summe als einer Zahl, welche so viele Einheiten umfaßt, daß dieselben mit den Einheiten aller einzelnen Summanden zu Paaren verbunden, keine als Rest zurücklassen. Wir können daher jeden Summand als Gruppe auffassen und erhalten dann so viele Gruppen als Summanden und können mithin auch jeder Einheit der Gruppen eine Einheit der gleich starken Summanden in der Summe zuordnen.

Das Produkt mehrerer einander gleicher Faktoren nennt man die Potenz der als Faktor verwendeten „Grundzahl“. Der entsprechende griechische Ausdruck δυναμις bedeutet beim griechischen Mathematiker Hippokrates von Chios (5. Jahrh. v. Chr.) und bei Diophant von Alexandria (3. bis 4. Jahrh. n. Chr.) nur das Produkt zweier gleicher Faktoren, während der italienische Mathematiker Tartaglia (1557) und der Holländer Simon Stevin von Leiden (1620) für das Produkt beliebig vieler gleicher Faktoren den Ausdruck „Dignität“ wählten. Je nach der Zahl der Faktoren bezeichnete man im Mittelalter die Potenzen mit verschiedenen Namen. Bei zwei Faktoren gebrauchte man die Bezeichnung „census quadratus“ oder „census“ allein, während heutzutage nur der Ausdruck „Quadrat“ gebräuchlich ist. Der Name „Kubus“ für die „dritte Potenz“ geht noch auf die griechischen Mathematiker zurück. Für höhere Potenzen verwenden wir die entsprechenden Ordnungszahlen, während im Mittelalter bis ungefähr zur 10ten Potenz eigene Benennungen eingeführt waren.

Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man die Produkte aus ihren Summanden und dieser Zahl zueinander addiert. $(a+b)c = ac + bc$.

Dieses die Addition mit der Multiplikation verknüpfende Gesetz nennt man das **Distributivgesetz der Multiplikation.** Durch Vertauschung der beiden ersten Faktoren ergibt sich daraus auch der Satz:

Eine Zahl wird mit einer Summe multipliziert, indem man sie mit jedem Summanden multipliziert und die so erhaltenen Teilprodukte addiert. $c(a+b) = ca + cb$.

Daß die Produkte $p_1 = (a+b)c$ und $p_2 = ac + bc$ einander gleich sind, ergibt sich aus der Erwägung, daß die $(a+b)$ Gruppen mit je c-Einheiten in zwei Abschnitte geteilt werden können, deren erster, mit a-Gruppen, zur paarweisen Verknüpfung mit den Einheiten des Produktes ac eben ausreicht, während für den zweiten Abschnitt dies beim Produkte bc der Fall ist.

Durch wiederholte Anwendung des Distributivgesetzes gelangen wir zum Satz:

Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man

jeden Summanden des einen Faktors mit jedem Summanden des anderen multipliziert und alle so erhaltenen Teilprodukte addiert. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

Dies folgt aus der Entwicklung $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd.$

Wollten wir das Distributivgesetz für eine beliebige Rechnungsoperation aussprechen, so müßten wir sagen: Mit einer Summe wird diese Rechnungsoperation vorgenommen, indem man sie mit jedem Summanden vornimmt und dann die erhaltenen Zahlen addiert. Dieses Gesetz läßt sich aber eben nicht für jede Rechnungsoperation aufstellen. Unter „Quadrieren" versteht man die Rechnungsoperation, wenn man eine Zahl mit sich selbst multipliziert. Es ist also $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$, die Anwendung des Distributivgesetzes würde aber zur unrichtigen Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ führen.

Die Subtraktion natürlicher Zahlen.

Bei der Bildung der Summe $a + b = s$ setzen wir voraus, daß die beiden Zahlen a und b bekannt seien und das Verfahren der Addition führt dann unter allen Umständen zur Auffindung einer neuen Zahl. Die gefundene Zahl kann nur eine einzige sein, denn alle so abgeleiteten Zahlen sind einander gleich und es gibt immer eine solche Zahl, so lange es neue Summanden gibt. Anders verhält es sich, wenn wir in der Summe $b + r = a$ den Summand b und die Summe a als bekannt voraussetzen. Wählen wir für r eine zu kleine Zahl, deren Einheiten nicht hinreichen, um nebst denen von b paarweise mit den Einheiten von a verknüpft zu werden, so ist sie nicht geeignet, die gestellte Forderung der Gleichheit zu erfüllen, und ebensowenig, wenn sie, zu denen von b hinzugefügt, gegenüber a einen Überschuß von Einheiten ergibt. Wenn es also eine solche Zahl gibt, so kann es nur eine einzige sein. Gibt es aber überhaupt eine? Schon der Satz, daß die Summe zweier natürlicher Zahlen größer sein muß, als jeder Summand, sagt uns, daß es nur dann eine natürliche Zahl r gibt, für welche $b + r = a$, wenn $a > b$. Die Zahl, welche diese Bedingung erfüllt, nennen wir **Differenz, Rest** oder **Unterschied.**

Subtrahieren heißt eine Zahl suchen, die zu einer bekannten Zahl, dem Subtrahend, addiert eine gegebene Zahl, den Minuend, als Summe gibt.

Bedeutet r die gesuchte Zahl, b den Subtrahend und a den

Minuend, so setzen wir $r = a - b$, wenn $b + r = a$, und dies ist nur möglich, **falls** $a > b$.

Während also die Addition zweier natürlicher Zahlen immer möglich ist, läßt sich die Subtraktion mit natürlichen Zahlen nur dann ausführen, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Aus der so festgestellten Bedeutung des Ausdruckes Subtraktion ergeben sich folgende Beziehungen:

Wenn man von einer Summe den einen Summand subtrahiert, so erhält man den andern Summand als Rest. $(a + b) - b = a$, $(a + b) - a = b$.

Wenn man zu einer Differenz den Subtrahend addiert, so erhält man den Minuend und wenn man vom Minuend die Differenz subtrahiert, so erhält man den Subtrahend. $(a - b) + b = a$, $b + (a - b) = a$ **und** $a - (a - b) = b$.

Diese beiden Sätze kann man auch mit den Worten zusammenfassen: Wenn man zu einer natürlichen Zahl eine andere addiert und dann wieder von der Summe subtrahiert, so erhält man die ursprüngliche Zahl; desgleichen wenn man eine natürliche Zahl zuerst von einer anderen subtrahiert und dann wieder zur Differenz addiert.

Wenn man gleiche Subtrahenden von gleichen Minuenden subtrahiert, so erhält man gleiche Reste. Aus $a = b$ **und** $c = d$ **folgt** $a - c = b - d$.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der Erwägung, daß sich unter diesen Voraussetzungen sowohl die Einheiten von a und b, wie auch die von c und d zu Paaren verknüpfen lassen, mithin auch die beiderseits übrig bleibenden Einheiten zu Paaren vereinigt bleiben können, wenn die aus c und d gebildeten Paare von den aus a und b gebildeten weggenommen werden. Ferner folgt aus $a - c = b - d$ und $c = d$, daß $(a - c) + c = (b - d) + d$, mithin daß $a = b$, während dies nicht möglich wäre, wenn $a - c$ nicht gleich $b - d$ wäre.

Aus dem Wesen der Subtraktion ergeben sich noch folgende Sätze:

Der Wert einer Summe wird um eine Zahl c **vermindert, wenn man von irgend einem Summand diesen Betrag subtrahiert.** $(a + b) - c = a + (b - c) = (a - c) + b$.

Wenn man nämlich zum Resultat c addiert, so erhält man immer $a + b$, denn $[a + (b - c)] + c = a + [(b - c) + c] = a + b$ und $[(a - c) + b] + c = [(a - c) + c] + b = a + b$.

Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn ein Summand

um einen Betrag c vermehrt, ein anderer Summand aber um denselben Betrag vermindert wird.

$$(a+b)=(a+c)+(b-c)=(a-c)+(b+c.)$$

Da jede Summe kommutativ und assoziativ ist, so ergibt sich $(a+c)+(b-c)=a+[(b-c)+c]=a+b$ und $(a-c)+(b+c) = [(a-c)+c]+b=a+b$.

Eine Differenz wird um c Einheiten vermehrt, wenn der Minuend um ebensoviele Einheiten vergrößert wird, der Subtrahend aber ungeändert bleibt, sie wird dagegen um c Einheiten vermindert, wenn der Minuend um diesen Betrag vermindert wird, der Subtrahend aber gleich bleibt.

$$(a+c)-b=(a-b)+c \text{ und } (a-c)-b=(a-b)-c.$$

Wenn nämlich $a-b=r$ und daher $a=b+r$ ist, so können wir zu beiden Zahlen gleiche Zahlen addieren und erhalten $a+c = (b+r)+c=b+(r+c)$, mithin $(a+c)-b=r+c=(a-b)+c$.

Ferner folgt durch beiderseitige Subtraktion von c, daß $a-c =(b+r)-c$. Da der Wert einer Summe um c vermindert wird, wenn man diesen Betrag von einem Summanden subtrahiert, so ist $(b+r)-c=b+(r-c)$ und daher $a-c=b+(r-c)$ also $(a-c)-b =r-c=(a-b)-c$. Dabei müssen wir aber voraussetzen, daß nicht nur $a>b$, sondern auch $a>c$ und $a-c>b$.

Eine Differenz wird um c Einheiten vermindert, wenn der Minuend ungeändert bleibt und der Subtrahend um c Einheiten vermehrt wird, wird aber um c Einheiten größer, wenn der Subtrahend um ebensoviel abnimmt.

$$a-(b+c)=(a-b)-c \text{ und } a-(b-c)=(a-b)+c.$$

Wenn $a=b+r$, also die Summe zweier Zahlen b und r einer Zahl a gleich sein soll, so muß der zweite Summand um c kleiner gemacht werden, wenn der erste Summand um c erhöht wird. Aus demselben Grunde muß r um c größer angenommen werden, falls der Summand b durch $b-c$ ersetzt wird. Aus $a=(b+c)+(r-c)$ folgt daher $a-(b+c)=r-c=(a-b)-c$ und aus $a=(b-c)+(r+c)$ ergibt sich $a-(b-c)=r+c=(a-b)+c$.

Der Wert einer Differenz ändert sich nicht, wenn Minuend und Subtrahend um dieselbe Zahl vermehrt oder beide um dieselbe Zahl vermindert werden.

$$a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c).$$

Wenn $a=b+r$, so folgt daraus $a+c=(b+r)+c=(b+c)+r$, also $(a+c)-(b+c)=r=a-b$. Ferner ist dann $a-c=(b+r) -c=(b-c)+r$, weil der Wert der Summe $b+r$ um c vermin-

dert wird, wenn man c von b subtrahiert. Aus $a - c = (b - c) + r$ folgt aber $(a - c) - (b - c) = r = a - b$.

Aus diesen Sätzen ergeben sich auch die Beziehungen zwischen den Resten ungleicher Minuenden und Subtrahenden. So ersieht man aus der Vergleichung der Ausdrücke $a - b = r$ und $(a + c) - b = r + c$, daß der Satz besteht:

Der gleiche Subtrahend gibt von einem größeren Minuend subtrahiert einen größeren Rest. Aus $a' > a$ folgt $a' - b > a - b$.

Aus den Ausdrücken $a - b = r$ und $a - (b + c) = r - c$ ergibt sich der Satz:

Der größere Subtrahend gibt vom gleichen Minuend subtrahiert einen kleineren Rest. Aus $b < b'$ folgt $a - b' < a - b$.

Wird ein kleinerer Subtrahend von einem größeren Minuend subtrahiert, so erhält man einen größeren Rest. Wenn $a' > a$ und $b < b'$ so ist $a' - b > a - b'$.

Wegen $a' > a$ ist nämlich $a' - b > a - b$ und wegen $b < b'$ ist $a - b > a - b'$. Aus $a' - b > a - b > a - b'$ folgt aber $a' - b > a - b'$. Diese Sätze kann man auch noch in anderer, z. B. in folgender Form aussprechen: Gleiches von Ungleichem subtrahiert gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen. Ungleiches von Gleichem subtrahiert gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Wenn $a > a'$ und $b > b'$, so läßt sich daraus über $a - b$ und $a' - b'$ nichts folgern.

Das Rechnen mit Summen und Differenzen natürlicher Zahlen.

In den vorausgehenden Abschnitten haben wir erörtert, wie bei der Addition, Multiplikation und Subtraktion das Resultat, seiner Größe nach, mit der Größe der Summanden, der Faktoren, des Minuenden und Subtrahenden zusammenhängt. Manche Aufgaben der Arithmetik und Algebra zwingen uns auch mit denjenigen Summen, Differenzen und Produkten zu rechnen, deren ziffernmäßig ausgedrückten Wert wir nicht kennen. Sollen wir z. B. eine Zahl mit einer Summe multiplizieren, deren Summanden wir erst später in besondern Zahlen ausdrücken können, so nützen uns alle Regeln über das Multiplizieren mit ziffernmäßig angegebenen Zahlen nichts, sondern wir müssen wissen, welche Operationen mit den einstweilen nur durch Buchstaben angedeuteten Summanden auszuführen sind,

damit das Resultat schließlich dasselbe ist, als hätten wir mit besondern Zahlen gerechnet. Die hierfür nötigen Zeichen und Formeln haben wir bereits aus den Begriffen von Gleichheit, Summe, Produkt und Subtraktion abgeleitet und damit auch bewiesen. Wir brauchen sie nur noch im letztgenannten Sinne zu deuten.

Die Formel, welche die assoziative Eigenschaft der Summe ausspricht, nämlich $(a+b)+c=a+(b+c)$, ergibt von links nach rechts gelesen die Regel:

Eine Zahl (c) wird zu einer Summe ($a+b$) addiert, indem man sie zu einem Summanden (b) addiert.

Die Formel $(a+c)-b=(a-b)+c$ entspricht dem früher abgeleiteten Satz: Wird der Minuend (a) einer Differenz ($a-b$) um einen Betrag (c) vermehrt, während der Subtrahend (b) ungeändert bleibt, so wird der Rest ($a-b$) um denselben Betrag (c) größer. Jetzt sagen wir:

Von einer Summe wird eine Zahl subtrahiert, indem man sie von einem Summand subtrahiert und dann den zweiten Summand zur Differenz addiert.

In ähnlicher Weise lassen sich aus den entsprechenden Formeln die folgenden Sätze herauslesen:

$$(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c).$$

Zu einer Differenz wird eine Zahl addiert, indem man sie zum Minuend addiert und vom Resultat den Subtrahend subtrahiert oder indem man vom Minuend die Differenz aus dem Subtrahend und der Zahl subtrahiert.

$$(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c).$$

Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahiert, indem man sie vom Minuend subtrahiert und vom so erhaltenen Resultat den Subtrahend subtrahiert oder indem man vom Minuend die Summe des Subtrahenden und der Zahl subtrahiert.

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c.\}$$

Eine Summe wird zu einer Zahl addiert, indem man zu ihr zuerst den einen und zur Summe den anderen Summand addiert.

$$a-(b+c)=(a-b)-c.$$

Eine Summe wird von einer Zahl subtrahiert, indem man zuerst den einen und von der Differenz den anderen Summanden subtrahiert.

Wird der Subtrahend (b) einer Differenz ($a-b$) um eine Zahl (c) vermehrt, so ist die Differenz ($a-b$) um ebensoviel (c) kleiner.

$$c+(a-b)=(a+c)-b.$$

Eine Differenz wird zu einer Zahl addiert, indem man den

Minuend zu ihr addiert und von dieser Summe den Subtrahend subtrahiert.

$$a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b.$$

Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahiert, indem man den Minuend von der Zahl subtrahiert und den Subtrahend zum erhaltenen Reste addiert oder indem man von der Summe aus der Zahl und dem Subtrahend den Minuend subtrahiert.

Jeder mehrgliedrige Ausdruck bedeutet das Resultat, das man erhält, wenn man zuerst die beiden ersten Zahlen durch das zwischen ihnen stehende Operationszeichen verknüpft, zu der so erhaltenen Summe oder Differenz die dritte Zahl addiert oder von ihr subtrahiert usf. Da wir jeden mehrgliedrigen Ausdruck so auffassen, so brauchen wir diese Reihenfolge der Operationen nicht erst durch Klammern anzudeuten.

Es bedeutet daher z. B. $a+b-c-d+e=\{[(a+b)-c]-d\}+e.$

Wenn ein mehrgliedriger Klammerausdruck zu einer Zahl **addiert** werden soll, so können wir die Klammer weglassen, weil der dadurch entstehende klammerlose Ausdruck sich von Klammerausdruck nur darin unterscheidet, daß das erste Glied desselben um diese Zahl vermehrt wird. Es ist also:

$$a+(b-c+d)=[(a+b)-c]+d=a+b-c+d.$$

Wenn ein mehrgliedriger Ausdruck von einer Zahl **subtrahiert** werden soll, so erhalten wir einen gleichwertigen klammerlosen Ausdruck, wenn wir jedes Glied, vor dem das Subtraktionszeichen steht, zum Resultat der vorausgehenden Operationen addieren, denn es ist Subtrahend einer subtrahierten Differenz. Die übrigen Glieder werden mit den vorausgehenden Gliedern durch Subtraktion verknüpft, denn sie sind entweder Summand einer subtrahierten Summe oder Minuend einer subtrahierten Differenz. Es ist also

$$a-[b-c+d]=a-[(b-c)+d]=a-(b-c)-d=a-b+c-d.$$

Jeder mehrgliedrige Ausdruck, in dem auch Subtraktionen vorkommen, kann als eine einzige Differenz zweier eventuell mehrgliedrigen Summen dargestellt werden. Es ist also $a-b-c+d-e$ $=\{[(a-b)-c]+d\}-e=(a-b)+d-(c+e)=(a+d)-(b+c+e).$

Dem Distributivgesetz entnehmen wir, wie die Multiplikation einer Summe auszuführen ist, wenn wir deren Summanden nur in Form allgemeiner Zahlen kennen. So gelangen wir zum Satze:

Eine Summe wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man jeden Summand mit derselben multipliziert und die erhaltenen Teilprodukte addiert.

$$(a+b)\cdot m=a\cdot m+b\cdot m.$$

Daß ferner $(a-b) \cdot m = a \cdot m - b \cdot m$, ergibt sich aus folgender Erwägung: Wenn wir beiderseits bm addieren, so erhalten wir $(a-b)m + bm = am - bm + bm = am$ und $(a-b)m + bm = [(a-b)+b]m = am$, daher ist $(a-b)m = am - bm$, weil sonst nicht Gleiches zu Gleichem addiert wieder Gleiches geben könnte. Wir können dieses Ergebnis mit den Worten ausdrücken:

Eine Differenz wird mit einer natürlichen Zahl multipliziert, indem man vom Produkt aus dem Minuenden und der Zahl das Produkt aus dem Subtrahenden und der Zahl subtrahiert.

Erweiterung des Zahlengebietes durch die Subtraktion.

Durch die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen gelangen wir immer wieder zu natürlichen Zahlen, ohne daß jemals eine Operation unausführbar wäre, wie es bei der Subtraktion vorkommen kann, wenn der Minuend kleiner als der Subtrahend ist. Wollen wir also die Summe zweier Zahlen a und b oder deren Produkt bestimmen, so wissen wir von vornherein, daß es eine natürliche Zahl $s = a + b$ oder $p = ab$ gibt. Soll aber $b + r = a$ sein, so wissen wir, daß es nur dann eine solche Zahl r gibt, wenn $a > b$ ist. In diesem Falle haben wir für r auch $a - b$ geschrieben und gezeigt, wie man mit diesem Ausdruck rechnet, wenn wir die Werte von a und b nicht ziffernmäßig kennen. Diese Rechnungen mit a und b können wir aber auch dann ausführen, wenn a nicht größer als b ist, und deshalb können wir auch mit Differenzen rechnen, bei denen entweder $a = b$ oder sogar $a < b$ ist. Solche Differenzen sind daher eine neue Art von Zahlen, und deshalb müssen wir zunächst feststellen, wann solche neue Zahlen einander gleich oder größer als andere sind, wie man sie addiert, subtrahiert und multipliziert, sei es mit natürlichen oder mit anderen Zahlen dieser neuen Art. Bisher haben wir mit den kleinen lateinischen Buchstaben nur natürliche Zahlen bezeichnet, fortan soll aber ein solcher Buchstabe entweder eine natürliche oder eine Zahl der neuen Art bedeuten. Das Gebiet der dadurch dargestellten Zahlen wird also damit erweitert.

Die Null als Zahl.

Schon die Forderung, eine Zahl r zu suchen, für welche $a + r = a$, läßt auf dem Gebiet der natürlichen Zahlen keine Lösung zu, d. h. sie ist unerfüllbar, wenn die verwendeten Buchstaben irgend eine Zahl bedeuten. Setzen wir aber wie beim Rechnen mit natürlichen

Zahlen $r = a - a$, so können wir dieses neue Zahlengebilde als die Differenz irgend zweier gleicher natürlicher Zahlen auffassen, und dafür gebraucht man dann das Wort „Null". Wo immer in einer Rechnung die „Null" auftritt, können wir dieselbe demnach durch die Differenz irgend zweier gleicher natürlicher Zahlen ersetzen. Aus dieser Bestimmung der neuen Zahl „Null" ergeben sich folgende Sätze über dieselbe:

Alle „Nullen" sind einander gleich. $0 = a - a = b - b = m - m.$

Sollen zwei Differenzen einander gleich, mithin $a - b = c - d$ sein, falls $a > b$ und $c > d$, so muß $a + d \overset{!}{=} c + b$ sein und umgekehrt, denn der letztere Ausdruck geht aus ersterem dadurch hervor, daß wir zu zwei gleichen Zahlen beiderseits dieselbe Zahl $b + d$ addieren. Wir setzen aber auch zwei Differenzen $a - b$ und $c - d$ einander gleich, wenn $a + d = c + b$, falls $a < b$ und $c < d$ und schreiben dann $a - b = c - d$. Im obigen Falle ist daher $a - a = b - b$, weil $a + b = a + b$.

„Null" ist eine Zahl, die um 1 kleiner ist, als die natürliche Zahl 1.

Wenn nämlich $0 = 1 - 1$, so ist auch $0 + 1 = (1 - 1) + 1 = 1 + 1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Da wir durch Addition der natürlichen Zahl 1 zu Null die natürliche Zahl 1 als die nächst höhere Zahl erhalten, so muß 0 als die nächst niedrigere Zahl als 1 betrachtet werden.

Die Summe beliebig vieler Nullwerte ist immer gleich Null.
$0 + 0 + 0 = (a - a) + (b - b) + (c - c) = (a + b + c) - (a + b + c) = 0.$

Wenn man zu einer Zahl die Null addiert oder sie von einer Zahl subtrahiert, so erhält man diese Zahl als Summe, beziehungsweise als Unterschied.

$$a + 0 = a + (b - b) = (a + b) - b = a$$

und

$$a - 0 = a - (b - b) = (a - b) + b = a.$$

Das Produkt zweier und daher auch beliebig vieler Nullen ist wieder Null.

$$0 \cdot 0 = (a - a) \cdot (b - b) = a \cdot b - a \cdot b - a \cdot b + a \cdot b$$
$$= (a \cdot b - a \cdot b) - (a \cdot b - a b) = 0 - 0 = 0.$$

Jede natürliche Zahl gibt mit Null multipliziert wieder Null.

$$a \cdot 0 = a (b - b) = a \cdot b - a \cdot b = 0.$$

Wenn wir bei einer Aufgabe, in der zwei Zahlen a und b durch eine Operation miteinander verknüpft werden, nicht wissen, ob es sich dabei um eine Addition oder um eine Multiplikation handelt, so genügt es, das Resultat dieser unbekannten Operation für den Fall zu beobachten, wenn die eine Zahl a von Null verschieden, die andere aber $b = 0$ ist. Ist das Resultat gleich a, so waren die beiden

Zahlen durch Addition verknüpft, also es war eine Summe, ist aber das Resultat gleich Null, so ist das Resultat ein Produkt. Wenn wir einen Konduktor mit Glaselektrizität laden, so entsteht in der Umgebung desselben ein elektrisches Feld. Stellen wir neben diesen Konduktor isoliert einen zweiten, ebenfalls mit Glaselektrizität geladenen Konduktor, so nimmt die Feldstärke zu, aber wir wissen noch nicht, ob als Summe oder als Produkt. Wird der zweite Konduktor entladen und damit das von ihm erzeugte elektrische Feld gleich Null, so bleibt noch immer die Feldstärke übrig, die von der Ladung des ersten Konduktors stammt. Daher war das Gesamtergebnis beider Feldstärken eine Summe. Wäre es ein Produkt gewesen, so hätte nach der Entladung des zweiten Konduktors jede Feldstärke spurlos verschwinden müssen.

Wenn senkrecht zur Richtung eines Hebelarmes an seinem freien Ende eine Kraft wirkt, so entsteht ein Drehmoment, das um so größer wird, wenn die Kraft zunimmt und wenn der Arm länger ist. Ist die Maßzahl des Drehmomentes die Summe oder das Produkt aus den Maßzahlen von Kraftarmlänge und Kraft? Es sei die Länge des Hebelarmes 10 cm, aber die Kraft gleich Null. Dann ist auch das Drehmoment gleich Null, denn es vermag keine Arbeit zu leisten. Wäre also das Drehmoment eine Summe, so müßte es auch dann noch arbeitsfähig sein. Es ist also ein Produkt aus Armlänge und Kraft. Wenn ferner der Kraftarm gleich Null ist, und daher die Kraft im Drehungspunkt angreift, dann kommt durch dieselbe überhaupt keine Drehung zustande, und das Drehmoment ist wieder Null. Also spielt in diesem Falle auch der Kraftarm die Rolle eines Faktors und nicht die eines Summanden.

Negative und relative Zahlen.

Wenn $a < b$, so gibt es keine natürliche Zahl n, für welche $b + n = a$. Die Differenz $n = a - b$ kann daher keine natürliche Zahl sein, aber wir können trotzdem mit einer solchen Zahl rechnen, weil wir mit den Differenzen natürlicher Zahlen rechnen können. Es läßt sich daher auch angeben, wann zwei solche Zahlen einander gleich oder ungleich sind, wie man sie zu natürlichen und ihnen gleichartigen Zahlen addieren, von ihnen subtrahieren oder mit denselben multiplizieren kann.

Unter einer negativen ganzen Zahl verstehen wir die Differenz zweier natürlicher Zahlen, deren Subtrahend größer ist als der Minuend.

Zwei negative ganze Zahlen sind einander gleich, wenn die Summe aus dem Minuend der ersten und dem Subtrahend der zweiten gleich ist der Summe aus dem Minuend der zweiten und dem Subtrahend der ersten. Ist $n = a - b$ und $m = c - d$, so ist $n = m$, wenn $a + d = c + b$.

Der Wert einer Differenz bleibt ungeändert, wenn wir von Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl subtrahieren. Es ist also für $a < b$, $a - b = (a - a) - (b - a) = 0 - (b - a)$. Wenn wir den kleineren Minuend vom größeren Subtrahend einer negativen Differenz subtrahieren, so erhalten wir als Rest eine natürliche Zahl, die wir als den **„absoluten Wert“** jener negativen Zahl bezeichnen. Wenn wir nur mit dem absoluten Wert einer negativen Zahl rechnen, so deuten wir dies damit an, daß wir sie zwischen zwei stehende Striche setzen.

Ist also $a < b$ und $b - a = d$, so ist die negative Zahl $n = a - b = (a - a) - (b - a) = 0 - (b - a) = 0 - d =$ „$-d$“ und $|a - b| = b - a = d$ der absolute Wert von $a - b$. Da es beim Rechnen mit negativen ganzen Zahlen sehr vorteilhaft ist, den „absoluten Wert“ zu verwenden, so empfiehlt es sich, die negative Zahl mit Hilfe des absoluten Wertes allein darzustellen, und dies geschieht durch das ihm vorgesetzte Operationszeichen der Subtraktion, welches dann das „negative Vorzeichen“ genannt wird. Ist d eine natürliche Zahl, so bedeutet $-d$ irgend eine negative Differenz, deren Subtrahend um d größer ist als der Minuend, also eine „negative Zahl“. Im Gegensatz zu den negativen Zahlen bezeichnet man die natürlichen Zahlen als „positive“ Zahlen. Wir können daher alle Zahlen von diesem Standpunkte aus in drei Gruppen teilen, nämlich in **positive**, die sich als Differenzen darstellen lassen, bei denen der Minuend größer ist als der Subtrahend, die Zahl **Null**, als Differenz zweier gleicher Zahlen und in **negative** Zahlen, die aus Differenzen hervorgehen, deren Subtrahend größer ist als der Minuend.

Als Analogon zur natürlichen Zahl 1, die wir fortan als die **„positive Einheit“** mit $+1$ bezeichnen werden, können wir jetzt auch eine **„negative Einheit“** einführen, die sich aus der Subtraktion einer beliebigen natürlichen Zahl (n) von der um die positive Einheit kleineren Zahl $(n - 1)$ ergibt. $-1 = (n - 1) - n$.

Mit Benützung des Begriffes „absoluter Wert“ können wir die Gleichheitsdefinition der negativen Zahlen auch in der Weise formulieren, daß wir sagen:

Zwei negative Zahlen sind einander gleich, wenn ihre absoluten Werte einander gleich sind, d. h. wenn sich die negativen Einheiten beider Zahlen paarweise zuordnen lassen, ohne daß ein Rest bleibt.

Von zwei negativen Werten gilt derjenige als der größere, welcher den kleineren absoluten Wert hat.

Ist nämlich $a < b$ und $c < d$, so ist $a - b > c - d$, wenn $a + d > b + c$; denn nur in diesem Falle gelangen wir durch beiderseitige Addition der Summe $b + d$ zu beiden Differenzen auf der linken Seite zu einer größeren Summe, wie es bei der Addition von gleichen Zahlen zu einer größeren sein soll. Wenn wir aber andererseits in $b + c < a + d$ beide Summen um $a + c$ vermindern, so erhalten wir $b - a < d - c$ und da $b - a = |a - b|$ und $d - c = |c - d|$, so ist $a - b > c - d$, wenn $|a - b| < |c - d|$.

Wir haben früher gefunden, daß Null $0 < +1$. Aus $4 - 5 < 5 - 5$, weil $4 + 5 < 5 + 5$, folgt $-1 < 0$, daß also die negative Einheit kleiner ist als Null, und alle anderen negativen Zahlen $(-m)$, deren absoluter Wert größer als 1 ist, sind kleiner als -1. Mithin ergibt sich für alle positiven Zahlen $n > +1$, daß $n > +1 > 0 > -1 > -m$ der Satz:

Alle positiven ganzen Zahlen sind größer als alle negativen ganzen Zahlen.

Wie rechnet man aber mit negativen Zahlen?

Eine negative Zahl $(-b)$ wird zu einer positiven Zahl (a) addiert, indem man ihren absoluten Wert (b) von derselben subtrahiert und sie wird von einer positiven Zahl (a) subtrahiert, indem man ihren absoluten Wert (b) zu derselben addiert.

$$a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b$$
$$a - (-b) = a - (0 - b) = a - 0 + b = a + b.$$

Wenn das Ergebnis einer solchen Rechnung, wie es hier im ersten Fall vorkommt, eine Differenz ist, so brauchen wir fortan nicht mehr zu unterscheiden, ob der Minuend größer oder kleiner als der Subtrahend ist, wie es beim Rechnen mit natürlichen Zahlen notwendig war, denn in dem durch die negativen Zahlen erweiterten Zahlengebiet gelangen wir durch Subtraktionen immer wieder zu Zahlen des erweiterten Gebietes, das wir jetzt als das Gebiet der „relativen Zahlen“ bezeichnen; in diesem bleibt sowohl die Addition wie auch die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Eine negative Zahl gibt, zu einer negativen Zahl addiert, als Summe eine negative Zahl, deren absoluter Wert die Summe der absoluten Werte beider Summanden ist, sie wird von einer negativen Zahl subtrahiert, indem man den absoluten Wert des Minuenden vom absoluten Wert des Subtrahenden subtrahiert.

$$-a + (-b) = (0 - a) + (0 - b) = 0 - a + 0 - b = 0 - (a + b) = -(a + b)$$
$$-a - (-b) = (0 - a) - (0 - b) = 0 - a - 0 + b = 0 - (a - b) = b - a.$$

Mit Hilfe dieser Sätze können wir jeden Ausdruck, der teils durch Addition, teils durch Subtraktion positiver oder negativer Zahlen zustande gekommen ist, als eine nur durch Addition aufgebaute Summe von positiven und negativen Zahlen darstellen. Eine solche wird im Gegensatz zu einer nur aus positiven Summanden bestehenden Summe als „algebraische Summe" bezeichnet. Umgekehrt kann man jede algebraische Summe, die nicht ausschließlich aus negativen Gliedern besteht, als das Resultat teils durch Addition, teils durch Subtraktion verknüpfter positiver Zahlen darstellen. Es ist also $a + b - c - d + e = (+a) + (+b) + (-c) + (-d) + (+e)$ und $a + (-b) + (-c) + (+d) + (-e) = +a - (+b) - (+c) + (+d) - (+e)$.

Um die Gesetze kennen zu lernen, welche für die Multiplikation positiver und negativer, also relativer ganzer Zahlen gelten, erinnern wir uns an die Formel für die Multiplikation zweier Differenzen und betrachten die positiven Zahlen als Differenzen, deren Subtrahend gleich Null ist, und die negativen Zahlen als Differenzen, deren Minuend gleich Null ist. Dann ergibt sich aus:

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd, \text{ daß}$$

$(a - 0)(c - 0) = ac$, daß also das Produkt zweier positiver Zahlen positiv ist,

aus $$(a - 0)(0 - d) = 0 - ad = -ad$$
und $$(0 - b)(c - 0) = 0 - bc = -bc,$$

daß das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl negativ ist, und endlich aus

$$(0 - b)(0 - d) = 0 + bd = +bd,$$

daß das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, während in allen diesen Fällen der absolute Wert des Produktes dem Produkte der absoluten Werte gleich ist. Wir fassen alle diese Regeln in eine zusammen und sagen:

Das Produkt zweier relativer Zahlen ist seinem absoluten Werte nach gleich dem Produkte der absoluten Werte der Faktoren und positiv oder negativ, je nachdem beide Faktoren gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.

Zur Einführung der negativen ganzen Zahlen gelangen wir dadurch, daß wir die Differenzen natürlicher Zahlen auch dann wieder als Zahlen auffassen, wenn sie nicht mehr in natürlichen Zahlen ausführbar sind und darauf auch die nämlichen Regeln anwenden, wie sie für die natürlichen Zahlen gelten. Diese Auffassung blieb dem ganzen Altertum und Mittelalter fremd und ist eine Errungenschaft der neuesten Zeit.

Gleichwohl finden wir schon frühzeitig die ersten Spuren zur Einführung der negativen und relativen Zahlen. So spricht z. B. Diophant von Alexandrien von Zahlen, die „hinzuzuzählen“ sind und von solchen, die „abgezogen“ werden müssen, aber eine größere Zahl von einer kleineren zu subtrahieren, hält er für „unstatthaft“. Beim „kaufmännischen Rechnen“ des Mittelalters stellte sich alsbald das Bedürfnis heraus, die als „Vermögen“ und „Schulden“ („Soll und Haben“) eingeschriebenen Beträge gegenseitig zu verrechnen, mit denselben also zu rechnen wie mit positiven und negativen Zahlen. Leonardo von Pisa (1202) bringt negative Gleichungswurzeln bereits mit dem Begriffe „Schuld“ im kaufmännischen Rechnen in einen innern Zusammenhang. Der italienische Mathematiker Cardano (1545) bezeichnet die positiven Zahlen als „numeri veri“, die negativen als „numeri ficti“, und deutet damit die Bildung eines neuen Begriffes an. Der Franzose Vieta gebrauchte (1591) für diese Zahlenarten die Ausdrücke „affirmativ“ und „negativ“, deren ersteren der Engländer Harriot durch das uns geläufige „positiv“ ersetzte. Bei Descartes kann (1637) ein und derselbe Buchstabe positive oder negative, also nach unserer Ausdrucksweise irgend eine relative Zahl bedeuten.

Größen, deren absolute Beträge gleich, deren Summe aber Null ist, faßte man schon längst als „entgegengesetzt“ auf und rechnete mit denselben wie mit relativen Zahlen. **Die erfahrungsmäßige oder empirische Ableitung derselben ging also der theoretischen, hier der arithmetischen Entwicklung voraus.** Solche entgegengesetzte Größen sind z. B. die geogr. Breite nördlich und südlich vom Äquator, oder die geogr. Länge östlich und westlich von Ferro, Annäherung und Entfernung zweier Punkte, Druck und Zug, Ausdehnung und Zusammenziehung, Glas- und Harzelektrizität usw. Besonders charakteristisch ist die Bezeichnung der Temperaturgrade „über Null“ und „unter Null“.

Die Division natürlicher Zahlen.

Das Produkt zweier Faktoren besteht aus so vielen Gruppen, als der eine Faktor Einheiten enthält, und die Stärke der Gruppen entspricht der Zahl der Einheiten im anderen Faktor. Sollen wir also eine Zahl q ausfindig machen, die mit 4 multipliziert 12 gibt, so heißt das, wir sollen entweder so viele Gruppen zu je 4 Einheiten bilden, daß wir 12 Einheiten erhalten, oder aus 12 Einheiten

4 Gruppen von entsprechender Stärke herstellen. Mit 13 Einheiten werden wir uns vergeblich bemühen, eine geeignete Anzahl von Gruppen oder Gruppen von entsprechender Stärke ausfindig zu machen. Während demnach die Bildung des Produktes nie auf Schwierigkeiten stößt, wenn die Faktoren zwei uns bekannte natürliche Zahlen sind, ist es nicht immer möglich, eine natürliche Zahl als das Produkt eines beliebigen Faktors darzustellen. Bedeuten a und b natürliche Zahlen und gibt es noch eine solche Zahl q, für welche $b \cdot q = a$, so bezeichnen wir q als den **Quotient,** a als den **Dividend** und b als **Divisor.** Das dabei verwendete Rechnungsverfahren nennen wir **dividieren, teilen** oder **messen.** Wir verwenden dafür die Bezeichnungen $q = a : b = \frac{a}{b}$. Aus der Bedeutung dieser Operation ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit folgender Sätze:

Wenn man ein Produkt zweier natürlicher Zahlen durch den einen Faktor dividiert, so erhält man den anderen Faktor als Quotient. $(a \cdot b) : b = a$, $(a \cdot b) : a = b$.

Wenn man einen Quotient mit dem Divisor multipliziert, so erhält man den Dividend, und wenn man den Dividend durch den Quotient dividiert, so erhält man als Resultat den Divisor. $(a : b) \cdot b = b \cdot (a : b) = a$ **und** $a : (a : b) = b$.

Diese beiden Sätze kann man in der Form zusammenfassen, daß man sagt: Wenn man eine natürliche Zahl mit einer anderen multipliziert und dann durch dieselbe dividiert, oder zuerst durch dieselbe dividiert und dann mit ihr multipliziert, so erhält man die ursprüngliche Zahl. Man bezeichnet deshalb auch die Multiplikation und Division wie die Addition und Subtraktion als einander **entgegengesetzte** Operationen.

Wenn man gleiche Dividenden durch gleiche Divisoren dividiert, so erhält man gleiche Quotienten. Wenn $a = b$ **und** $c = d$, **so ist** $a : b = c : d$.

Unter der Voraussetzung, daß diese Quotienten natürliche Zahlen sind, ergibt sich die Richtigkeit dieses Satzes aus der Erwägung, daß wir bei gleicher Stärke der zu bildenden Gruppen ($c = d$) in beiden Fällen gleich viele Gruppen verwenden müssen, wenn die Zahl der Einheiten dieselbe ist.

Ein Produkt wird durch eine Zahl (c) dividiert, wenn ein Faktor desselben dadurch dividiert wird. $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$.

Unter der Annahme, daß alle hier vorkommenden Quotienten in natürlichen Zahlen ausführbar seien, ergibt die Multiplikation

von $(a:c) \cdot b$ mit c das Produkt $[(a:c) \cdot b] \cdot c = [(a:c) \cdot c] \cdot b = a \cdot b$, und andererseits erhalten wir durch Multiplikation von $a \cdot (b:c)$ mit c dasselbe Produkt $[a \cdot (b:c)] \cdot c = a \cdot [(b:c) \cdot c] = a \cdot b$. Dies ist aber nur möglich, wenn das mit c multiplizierte Produkt der richtige Ausdruck für den Quotienten war.

Der Wert eines Produktes ändert sich nicht, wenn ein Faktor mit einer Zahl (c) multipliziert und ein anderer durch dieselbe dividiert wird. $a \cdot b = (a\,c) \cdot (b:c) = (a:c) \cdot (b \cdot c)$.

Es ist nämlich $(a \cdot c) \cdot (b:c) = a \cdot [(b:c) \cdot c] = a \cdot b$.

Wenn der Dividend mit c multipliziert wird, während der Divisor ungeändert bleibt, so wird dadurch auch der Quotient mit c multipliziert, und er wird durch c dividiert, wenn der Dividend durch c dividiert wird, der Divisor aber derselbe bleibt.

Ist $a:b = q$, so ist $(a \cdot c):b = q \cdot c$ und $(a:c):b = q:c$ oder $(a \cdot c):b = (a:b)\,c$ und $(a:c):b = (a:b):c$.

Aus $a = b \cdot q$ folgt nämlich einerseits $a \cdot c = (b \cdot q) \cdot c = b \cdot (q \cdot c)$, also auch $(a \cdot c):b = q \cdot c$ und andererseits $a:c = (b \cdot q):c = b \cdot (q:c)$, weil ein Produkt durch eine Zahl dividiert wird, wenn man einen Faktor durch dieselbe dividiert; somit ist auch $(a:c):b = q:c$.

Bleibt der Dividend ungeändert, während der Divisor mit c multipliziert wird, so erhalten wir einen durch c dividierten Quotienten, und wenn der Divisor durch c dividiert wird, so ergibt sich ein mit c multiplizierter Quotient.

Aus $a:b = q$ folgt $a:(b \cdot c) = q:c$ und $a:(b:c) = q \cdot c$ oder $a:(b \cdot c) = (a:b):c$ und $a:(b:c) = (a:b) \cdot c$.

Läßt sich a nicht nur in die Faktoren b und q zerlegen, sondern auch in Gruppen zu je $b \cdot c$ Einheiten, so ist $(q:c) \cdot b \cdot c = [(q:c) \cdot c] \cdot b = q \cdot b = (a:b) \cdot b = a$ und $q \cdot c:(b:c) = q\,[(b:c)\,c] = q \cdot b = (a:b)\,b = a$, wobei noch vorausgesetzt wird, daß sich b ohne Rest in Gruppen zu c Einheiten teilen lasse.

Der Wert des Quotienten ändert sich nicht, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziert oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

$$a:b = (a \cdot c):(b \cdot c) = (a:c):(b:c).$$

Wenn $a:b = q$, also $a = b \cdot q$, so ist auch $a \cdot c = b \cdot q \cdot c = (b \cdot c) \cdot q$ und daher auch $(a \cdot c):(b \cdot c) = q$. Das Zweite folgt aus $a:c = (b \cdot q):c = (b:c) \cdot q$, weil das Produkt $(b \cdot q)$ durch eine Zahl (c) dividiert wird, indem man einen Faktor (b) durch dieselbe dividiert und das Resultat mit dem andern Faktor (q) multipliziert, und aus $a:c = (b:c) \cdot q$ ergibt sich dann $(a:c):(b:c) = q = a:b$.

Das Vorzeichen des Quotienten ist positiv, wenn Dividend

und Divisor gleich bezeichnet, das negative, wenn sie verschieden bezeichnet sind.

Dieses dem analogen Satze über das Vorzeichen der Produkte entsprechende Gesetz ist die unmittelbare Folge desselben, denn wegen $a = b \cdot q$ und $-a = (-b) \cdot q$ ist q positiv, wenn a und b beide positiv oder negativ sind und wegen $a = (-b \cdot)(-q)$ und $-a = b \cdot (-q)$ muß q negativ sein, wenn entweder nur a oder nur b negativ ist.

Das Rechnen mit Produkten und Quotienten ganzer Zahlen.

Aus dem Distributivgesetz haben wir die Formel abgeleitet, wie eine Summe mit einer natürlichen Zahl multipliziert wird. Wir können den Ausdruck

$$am + bm = (a + b) \cdot m$$

auch in der Weise deuten, daß wir sagen:

Zwei Produkte, die einen gemeinsamen Faktor haben, werden zueinander addiert, indem man die Summe der nicht gemeinsamen Faktoren mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert.

In analoger Weise ergibt sich aus den identischen Ausdrücken: $(a - b)m = am - bm$ und $am - bm = (a - b)m$ der Satz:

Zwei Produkte, die einen gemeinsamen Faktor haben, werden voneinander subtrahiert, indem man die Differenz der nicht gemeinsamen Faktoren mit dem gemeinsamen Faktor multipliziert.

Die Formel, welche die assoziative Eigenschaft des Produktes zum Ausdrucke bringt, nämlich

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

ergibt von links nach rechts gelesen die Regel über die Multiplikation eines Produktes mit einer ganzen Zahl, welche lautet:

Ein Produkt wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man das Produkt aus dem einen Faktor und dieser Zahl noch mit dem zweiten Faktor multipliziert.

In ähnlicher Weise entnehmen wir dem Satze: $(a \cdot c) : b = (a : b) \cdot c$ die Regel:

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man den einen Faktor durch dieselbe dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliziert.

Die früher als gleichwertig erkannten Ausdrücke: $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b = a : (b : c)$ führen zur Regel:

Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliziert, indem man

den Dividend mit derselben multipliziert und das Produkt durch den Divisor dividiert, oder indem man den Dividend durch den Quotient aus dem Divisor und der Zahl dividiert.

Aus der Gleichheit der Ausdrücke $(a:b):c = (a:c):b = a:(b \cdot c)$ folgt:

Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Quotient aus dem Dividend und der Zahl durch den Divisor dividiert oder indem man den Dividend durch das Produkt aus dem Divisor und der Zahl dividiert.

Aus $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ und $a:(b \cdot c) = (a:b):c$ folgt:

Eine Zahl wird mit einem Produkte multipliziert, indem man dieselbe zuerst mit dem einen und dann mit dem andern Faktor multipliziert, und sie wird durch ein Produkt dividiert, indem man sie zuerst durch den einen und das Resultat durch den andern Faktor dividiert.

Aus $c \cdot (a:b) = (a \cdot c):b$ und $a:(b:c) = (a:b) \cdot c = (a \cdot c):b$ folgt:

Eine Zahl wird mit einem Quotient multipliziert, indem man sie mit dem Dividend desselben multipliziert und das erhaltene Produkt durch dessen Divisor dividiert, und die Zahl wird durch einen Quotient dividiert, indem man sie entweder durch den Dividend dividiert und den so erhaltenen Quotient mit dem Divisor multipliziert, oder indem man sie zuerst mit dem Divisor multipliziert und das erhaltene Produkt durch den Dividend dividiert.

Wie wir jeden Ausdruck, dessen Glieder teils durch Addition, teils durch Subtraktion miteinander verknüpft sind, als eine einzige Differenz zweier Summen darstellen können, so läßt sich auch ein Ausdruck, der nur durch Multiplikation und Division verschiedener Zahlen aufgebaut ist, als Quotient zweier Produkte darstellen.

Die Produkte gleicher Faktoren haben wir als „**Potenzen**“ bezeichnet. a^m bedeutet das Produkt aus m Faktoren, welche insgesamt gleich a sind. a heißt die „**Grundzahl**“ und die ganze Zahl m heißt „**Exponent** der Potenz“. Daraus folgen die beiden Sätze:

Zwei Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden miteinander multipliziert, indem man die gemeinsame Grundzahl mit der Summe, und sie werden durcheinander dividiert, indem man die Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ und } a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Der erste Teil ist eine Folge des obigen Satzes, daß eine Zahl mit einem Produkte multipliziert wird, indem man sie der Reihe nach mit allen Faktoren multipliziert. Die Zahl der Faktoren im Produkt ist die Summe der Exponenten der Faktoren, weil dann jeder Einheit in den Exponenten der Faktoren eine Einheit in der Summe und somit jedem Faktor in a^m und a^n ein Faktor in a^{m+n}

entspricht. Der zweite Teil des Satzes setzt voraus, daß der Exponent des Dividend größer ist als der Exponent des Divisors. Soll $a^m : a^n = a^d$ sein, so muß $a^m = a^{n+d}$, also die Zahl der Faktoren a, nämlich $m = n + d$ und $d = m - n$ sein.

Lesen wir die obige Formel von rechts nach links, so heißt sie:

Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summand potenziert und die erhaltenen Potenzen miteinander multipliziert, und sie wird mit einer Differenz potenziert, indem man die mit dem Minuend potenzierte Zahl durch die mit dem Subtrahend potenzierte Zahl dividiert.

Das Produkt zweier verschiedener Zahlen wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden Faktor mit derselben potenziert und die beiden Potenzen miteinander multipliziert, und ein Quotient, indem man den mit der Zahl potenzierten Dividend durch den mit der Zahl potenzierten Divisor dividiert.

$$(a\,b)^m = a^m \cdot b^m \text{ und } (a : b)^m = a^m : b^m.$$

Die Gleichheit im ersteren Ausdruck ergibt sich durch Anwendung der kommutativen und assoziativen Eigenschaft, indem man die einander gleichen Faktoren des m-fachen Produktes zu einer Potenz vereinigt und die so erhaltenen Potenzen im ersten Fall miteinander multipliziert, im zweiten durcheinander dividiert. Man kann diese Regeln auch, von rechts nach links gelesen, in der Form aussprechen, daß man sagt:

Zwei Potenzen mit gleichem Exponenten werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert, und sie werden durcheinander dividiert, indem man den Quotient der Grundzahlen mit diesem Exponenten potenziert.

In allen diesen Fällen handelt es sich nur um die Potenzen mit natürlichen Zahlen als Grundzahl und Exponent. Sie bilden daher nur eine naturgemäße Fortsetzung der Lehre vom Rechnen mit Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten. Es gibt aber noch eine allgemeinere Auffassung der Lehre von den Potenzen, die erst dann erledigt werden kann, nachdem wir den Begriff der Zahl entsprechend verallgemeinert haben werden.

Das Vorzeichen der Produkte mit mehr als zwei negativen Faktoren und der Potenzen negativer ganzer Zahlen richtet sich danach, ob die Zahl der negativen Faktoren, bzw. ob der Exponent einer solchen Potenz eine gerade oder ungerade Zahl ist und ist daher nur dann das negative, wenn diese Zahl ungerade ist. Je zwei negative Faktoren geben nämlich ein positives Produkt,

und dieses gibt nur mit einem noch übrigbleibenden negativen Faktor ein negatives Resultat.

Die Teilbarkeit der ganzen Zahlen.

Absolute Teilbarkeit.

Wenn es eine ganze Zahl q gibt, die mit b multipliziert, a gibt, so bezeichnen wir sie als den Quotienten der Zahlen a und b und sagen, a sei „durch b teilbar". Wir können aber das Wort „Teilbarkeit" auch noch in einem allgemeineren Sinn auffassen und fragen, ob es überhaupt eine ganze Zahl oder deren mehrere gebe, als deren Produkt a dargestellt werden kann. Da jede Zahl mit der positiven Einheit multipliziert ein mit dieser Zahl identisches Produkt gibt, so ist jede Zahl sowohl durch die Einheit als auch durch sich selbst „teilbar". Neben den Zahlen, die nur durch die Einheit und durch sich selbst teilbar sind, gibt es aber auch solche, die noch durch irgendwelche und nicht durch eine bestimmte andere Zahl „teilbar" sind, und die „Teilbarkeit" in diesem zuletzt angedeuteten Sinn soll hier näher untersucht werden.

Jene ganzen Zahlen, die außer durch die Einheit und durch sich selbst durch keine ganze Zahl teilbar sind, heißen „teilerfremd" oder „Primzahlen". Alle anderen ganzen Zahlen sind aus solchen Primzahlen **„zusammengesetzte"**, d. h. sie lassen sich als **Produkte von Primzahlen** darstellen.

Ist eine Zahl durch eine andere teilbar, die weder der Einheit oder der ersteren gleich ist, so heißt letztere ein **„Teiler"** oder **„Maß"** der ersteren, und diese ein **„Vielfaches"** der letzteren. Insofern alle zusammengesetzten Zahlen als Produkte von Primzahlen dargestellt werden können, bezeichnet man diese als **„Primfaktoren"**.

Der Begriff „Primzahl" wurde schon in der Philosophenschule des Pythagoras (6. bis 5. Jahrh. v. Chr.) aufgestellt. Die Einteilung der Zahlen in „gerade" und „ungerade" Zahlen, je nachdem dieselben durch die Primzahl 2 teilbar sind oder nicht, war nach Mitteilungen Platos (429—348 v. Chr.) zu seiner Zeit allgemein bekannt. Euklid von Alexandrien, der Verfasser jenes nach ihm benannten berühmtesten mathematischen Lehrbuches des Altertums (um 300 v. Chr.), gibt bereits einen Beweis dafür, daß es keine höchste Primzahl geben könne. Wenn nämlich p die höchste Primzahl wäre, so können wir mit Hilfe aller Primzahlen bis einschließlich p eine Zahl bilden, die entweder selbst eine noch höhere Prim-

zahl ist, oder in Primfaktoren zerlegt werden kann, die über p liegen. Diese Eigenschaft hat das um 1 vermehrte Produkt aller Primzahlen bis einschließlich p, denn es gibt, durch alle diese Primzahlen dividiert, immer 1 als Rest und ist daher durch keine von diesen, also überhaupt nicht oder nur durch höhere Primzahlen teilbar. Erathosthenes von Kyrene (276—194 v. Chr.) hat ein Verfahren angegeben, alle Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl zu finden. Man schreibt alle Zahlen bis zur bestimmten Grenze auf und streicht zuerst jede zweite Zahl, von 2 angefangen, also zuerst 4 weg. Dadurch entfallen alle durch 2 teilbaren, also alle geraden Zahlen. Die nächste auf 2 folgende Zahl ist 3, und von dieser angefangen wird dann jede dritte, also zuerst 6, dann 9 usf. fortgestrichen, wobei auch die schon früher gestrichenen Zahlen mitgezählt werden. Die nächste noch zurückgebliebene Zahl ist 5. Von dieser Zahl ausgehend wird jede fünfte, von 7 an jede siebente Zahl gestrichen usf. (Sieb des Erathosthenes.) Bei der Untersuchung, ob eine vorgegebene Zahl a eine Primzahl sei, braucht man ihre Teilbarkeit nur bis zur ersten Zahl b zu prüfen, deren Quadrat $b^2 > a$. Ist $b > a$ und wäre a durch eine Zahl $c > b$ teilbar, so müßte es auch durch eine Zahl $a:c = q < b$ teilbar sein. Man hat auch schon frühzeitig Tabellen von Primzahlen zusammengestellt, die weit über das praktische Bedürfnis hinausreichen. So hat schon um 1202 Leonardo von Pisa die Primzahlen bis 100, Franz van Schooten (1657) die bis 10000 und der österreichische Artillerieoffizier Vega (1797) die bis 400000 zusammengestellt. Der berühmte Göttinger Mathematiker Gauß (1849) untersuchte die Zahlen bis zur dritten und der bekannte Rechenkünstler Zacharias Dase in Hamburg die von der siebenten bis zur neunten Million.

Um eine vorgegebene Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen, dividiert man sie zuerst durch die niederste in ihr enthaltene Primzahl, und zwar so oft, bis der erhaltene Quotient durch dieselbe nicht mehr teilbar ist, dann den letzten Quotient durch die nächst höhere Primzahl in derselben Weise und so fort, bis man eine Primzahl als Quotient erhält.

Enthält die Zahl a den Primfaktor p_1 l-mal, den Primfaktor p_2 m-mal und den Primfaktor p_3 n-mal und ist also $a = p_1^l \cdot p_2^m \cdot p_3^n$, so müssen wir uns fragen, ob sich dann diese Zahl a nicht auch noch mit Hilfe anderer Primzahlen oder anderer Potenzen derselben darstellen läßt. Dies ist aber nicht der Fall. Wäre nämlich q eine von der Einheit und von p_1, p_2 und p_3 verschiedene Primzahl, die in a als Teiler enthalten ist, so müßte, wenn $a = q \cdot r$, wenigstens r durch p_1 l-mal, durch p_2 m-mal und durch p_3 n-mal teilbar sein.

Es müßte also $q \cdot p_1^l \cdot p_2^m \cdot p_3^n = p_1^l \cdot p_2^m \cdot p_3^n$ und daher $q = 1$ sein, was der Annahme $q > 1$ widerspricht. Man sagt daher:

Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich nur in einer einzigen Weise in ihre Primfaktoren zerlegen.

Um alle Faktoren zu erhalten, durch die eine Zahl a teilbar ist, muß man dieselbe nicht nur durch die Primfaktoren, sondern auch durch deren Produkte und Potenzen dividieren und erhält so teils Primfaktoren, teils zusammengesetzte Faktoren. Die Zahlen 12 (das Dutzend), 60 und 360 zeichnen sich durch eine große Anzahl von Teilern aus und wurden gerade deshalb zur Herstellung von Einheiten niedrigeren und höheren Ranges vielfach mit Vorteil benützt.

Relative Teilbarkeit.

Die Primzahlen bezeichnet man insofern auch als „absolute Primzahlen“, weil dadurch hervorgehoben werden soll, daß sie hinsichtlich der Teilbarkeit nicht mit andern Zahlen in Beziehung gebracht werden. Dies kann aber in der Weise geschehen, daß wir untersuchen, ob eine Zahl dieselben Teiler hat wie eine oder mehrere andere Zahlen, ob sie also mit demselben ein **„gemeinschaftliches Maß“** hat, oder ob sie zugleich mit mehreren anderen Zahlen Teiler eines **„gemeinschaftlichen Vielfachen“** ist. Haben zwei Zahlen keinen gemeinsamen Teiler, so sagen wir, sie seien **„relative Primzahlen“**. 12 ist keine „absolute Primzahl“, denn es ist gleich $2^2 \cdot 3$, es ist aber eine „relative Primzahl“ in bezug auf 25, weil 12 mit dieser Zahl keinen Teiler gemein hat; es ist dagegen **keine** relative Primzahl in bezug auf 15, mit der 12 den Teiler 3 gemeinschaftlich hat. Die Zahl 17 ist dagegen eine „absolute Primzahl“, weil sie überhaupt keine „Teiler“ besitzt und daher zu allen andern natürlichen Zahlen „relativ prim“ ist, die kein Vielfaches von 17 sind.

Das größte gemeinschaftliche Maß. Soll die Aufgabe gelöst werden, ein Maß von 36 anzugeben, so kann dies in sehr verschiedener Weise geschehen. 2, 3, 4, 6, 9, 12 und 18 sind die sieben hier möglichen Lösungen. Diese und ähnliche Aufgaben lassen also keine „eindeutige“ Lösung zu. Ebensowenig ist es eine eindeutige Aufgabe, wenn ich verlange, daß die gemeinschaftlichen Maße von 36 und 48 angegeben werden sollen, denn die Lösungen sind 2, 3, 4, 6 und 12. Dagegen ist es immer eine eindeutige Aufgabe, aus einer endlichen Reihe natürlicher Zahlen die größte auszuwählen. Wenn wir nämlich die Zahlen der Reihe nach betrachten und bei

jedem Übergang von einer Zahl zur anderen die kleinere verwerfen, so kann uns schließlich nur eine einzige Zahl übrigbleiben. Sind a und b zwei Zahlen, deren größtes gemeinschaftliches Maß wir suchen, so bezeichnen wir dasselbe mit $M(a, b)$ und dieses Zeichen bedeutet daher eine **einzige** Zahl, es ist also ebenso „eindeutig", wie die Summe dieser beiden Zahlen, deren Differenz usw.

Es sind zwei Verfahren gebräuchlich, um diese eindeutig bestimmte Zahl $m = M(a, b)$ zu finden. Die eine besteht darin, daß man die Zahlen, deren gemeinschaftliches Maß berechnet werden soll, in ihre Primfaktoren zerlegt und dann diejenigen Primfaktoren miteinander multipliziert, die in jeder der vorgegebenen Zahlen auftreten, und zwar jede so oft als Faktor verwendet, als sie in jeder einzelnen Zahl als Faktor vorkommt. Dabei ist nicht nur die Auswahl der Faktoren in einer einzigen Weise möglich, sondern auch das Resultat der Rechnungsoperationen, nämlich der Multiplikationen.

Beim zweiten Verfahren beruht die Ausführung und Eindeutigkeit des Resultates auf folgenden Hilfssätzen:

Jedes Maß einer Zahl ist zugleich ein Maß irgend eines Vielfachen derselben.

Ist b ein Maß von a, also $a = mb$ und $v = na$ ein Vielfaches von a, so folgt aus $v = na = n \cdot m \cdot b = (mn)b$, daß b auch ein Maß von v ist.

Jedes gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen a und b, also auch das größte, ist ein Maß ihrer Summe und Differenz.

Ist m ein gemeinschaftliches Maß von a und b, also $a = ma'$ und $b = mb'$, so ist $a + b = ma' + mb' = m(a' + b')$ und $a - b = ma' - mb' = m(a' - b')$.

Ist m ein Maß des Produktes ab, aber eine relative Primzahl zu a, dann muß m ein Teiler von b sein.

Wenn m ein Maß von ab ist, so muß $ab = qm$ und q eine ganze Zahl sein. Haben also a und m kein gemeinschaftliches Maß, mithin auch keine Primfaktoren gemein, so müssen alle Primfaktoren von m in b, also auch m in b enthalten sein.

Auf diesen Sätzen beruht die Auffindung des größten gemeinschaftlichen Maßes durch „Kettendivision". Ist $a > b$ und $a : b = q_1$ eine ganze Zahl, so ist b selbst das größte gemeinschaftliche Maß zwischen a und b, weil b die größte in b selbst enthaltene Zahl ist, und dann ist die Aufgabe eindeutig gelöst. Ist dagegen $a : b = q_1 + \frac{r_1}{b}$, also $a = bq_1 + r_1$, wobei $0 < r_1 < b$, so ist $r_1 = a - bq_1$ und enthält daher jedes, somit auch das größte gemeinschaftliche Maß von a und b. Andererseits ist wegen $a = bq_1 + r_1$ das größte gemeinschaft-

liche Maß von b und r auch das von a. Hierauf bilden wir den Quotient $b : r_1 = q_2$; ist dieser eine ganze Zahl, so ist $b = r_1 q_2$ und $a = b q_1 + r_1 = q_1 q_2 r_1 + r_1 = r_1 (q_1 q_2 + 1)$, mithin r_1 das größte gemeinschaftliche Maß zwischen a und b. Wenn aber $b = q_2 r_1 + r_2$, wobei $0 < r_2 < r_1$, so bilden wir $r_1 : r_2 = q_3$. Ist dann q_3 eine ganze Zahl, so ist $r_1 = r_2 q_3$, $b = q_2 r_2 q_3 + r_2 = r_2 (q_2 q_3 + 1)$ und $a = b q_1 + r_1 = r_2 (q_1 q_2 q_3 + 1) + r_2 q_3 = r_2 (q_1 q_2 q_3 + q_3 + 1)$, also r_2 der größte gemeinschaftliche Teiler von a und b. Wenn auch die Division $r_1 : r_2 = q_3 + \frac{r_3}{r_2}$ nicht „aufgeht", so ist doch wegen $0 < r_3 < r_2$ dieser neue Rest $r_3 < r_2 < r_1 < b$ also mindestens um 3 Einheiten kleiner als b.

Das Verfahren der „Kettendivision" besteht darin, daß man der Reihe nach die Quotienten $a : b = q_1 + \frac{r_1}{b}$, $b : r_1 = q_2 + \frac{r_2}{r_1}$, $r_1 : r_2 = q_3 + \frac{r_3}{r_2}$, $r_2 : r_3 = q_4 + \frac{r_4}{r_3}$ usw. bildet und die aus ihnen sich ergebenden Reste berechnet. Dies führt zu einer eindeutigen Lösung der Aufgabe, denn die Reste sind ganze Zahlen und nehmen bei jeder Division mindestens um 1 ab. Es muß also ein Rest Null werden. Ist der ihm unmittelbar vorhergehende Rest gleich 1, so sind a und b relative Primzahlen, weil dann a und b keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Teiler haben. Ist der letzte von Null verschiedene Rest größer als 1, so haben wir damit den größten gemeinschaftlichen Teiler, und zwar in eindeutiger Weise bestimmt, weil sowohl die Bestimmung der Quotienten, wie auch die der Reste durch eindeutige Rechnungsoperationen erfolgte.

Auch bei der Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Maßes von mehr als zwei Zahlen kann man beide oben angeführten Wege einschlagen. Beim ersteren Verfahren kann man das größte gemeinschaftliche Maß sofort aus der Zusammensetzung der einzelnen Zahlen ableiten, indem man nur die in allen Zahlen gleichzeitig vorkommenden Primzahlen miteinander multipliziert. Man kann aber auch so vorgehen, daß man nach irgend einem Verfahren z. B. für die 4 Zahlen a, b, c und d zuerst $M(a, b) = m_1$ berechnet, hierauf $M(m_1, c) = m_2$ und schließlich $M(m_2, d) = m_3$, welches dann das größte gemeinschaftliche Maß aller 4 Zahlen ist, da kein gemeinsamer Primfaktor von a, b, c und d in demselben fehlen kann. Denn ist p irgend ein gemeinsamer Faktor aller jener Zahlen, so muß er in a und b, mithin auch in m_1 vorkommen; ebenso in m_1 und c, daher auch in m_2 und aus demselben Grunde auch in m_3 enthalten sein. Da alle Zwischenrechnungen eindeutig sind, so muß auch das Endresultat so sein und daher immer denselben Wert ergeben,

wenn wir auch die vorgegebenen Zahlen in einer anderen Reihenfolge zur Untersuchung heranziehen.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Maßes haben wir zunächst darauf hingewiesen, daß dieselbe eine „eindeutige“ sei, weil unter einer endlichen Anzahl verschiedener Teiler, die insgesamt unter einer vorgegebenen Zahl liegen, nur einer der größte sein kann. Während aber die Anzahl der Teiler einer gegebenen Zahl notwendigerweise eine endliche sein muß, ist die Anzahl ihrer Vielfachen eine unbegrenzte, denn ich kann aus jedem Vielfachen ein neues ableiten, indem ich einen neuen Faktor hinzufüge. Wir müssen uns daher zuerst fragen, ob das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen eine „eindeutig bestimmte Zahl“ sei.

Sind a und b zwei Zahlen, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches berechnet werden soll, so erhalten wir jedenfalls ein Vielfaches, wenn wir das Produkt ab bilden. Dieses wird entweder schon das kleinste Vielfache sein, oder dieses liegt zwischen ab und der größeren von beiden Zahlen a und b, denn ein Vielfaches einer ganzen Zahl kann nicht kleiner als diese sein. Zwischen diesen Grenzen kann aber wieder nur eine endliche Anzahl von natürlichen Zahlen liegen, und unter diesen muß eine die kleinste sein. Den Weg zur Auffindung derselben vermittelt uns die Bestimmung des größten gemeinsamen Maßes.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen ist eine eindeutig bestimmte Zahl, und diese bezeichnen wir für die Zahlen a und b mit $V(a, b)$.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen a und b ist der Quotient aus ihrem Produkte und ihrem größten gemeinschaftlichen Maße. $V(a, b) = ab : M(a, b)$.

Dieser Quotient ist ein Vielfaches von a, weil $b : M(a, b) = b'$ eine ganze Zahl ist und daher $V(a, b) = a \cdot b'$; er ist ein Vielfaches von b, weil auch $a : M(a, b) = a'$ eine ganze Zahl und daher $V(a, b) = a' \cdot b$. Er ist endlich die kleinste ganze Zahl, welche diese Bedingungen erfüllt, denn $M(a, b)$ ist die größte Zahl, für welche sowohl $a : M(a, b)$, als auch $b : M(a, b)$ ganze Zahlen ergeben.

Um das kleinste gemeinsame Vielfache mehrerer Zahlen zu finden, verfahren wir ähnlich wie beim Aufsuchen des größten Maßes von mehr als zwei Zahlen. Es ist nämlich $V(a, b, c, d) = v$, wenn $V(a, b) = v_1$, $V(v_1, c) = v_2$ und $V(v_2, d) = v$, d. h. wir finden das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen, indem wir es zuerst für die beiden ersten, dann zwischen dem so gefundenen

Vielfachen und der dritten Zahl das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aufsuchen usw.

Die Berechnung von $V(a, b)$ gestaltet sich am einfachsten, wenn man $M(a, b)$ bestimmt, die kleinere der beiden Zahlen a und b dadurch dividiert und die größere mit dem so erhaltenen Quotient multipliziert.

Die systematische Darstellung der ganzen Zahlen.

Wir haben zuerst die natürlichen und später die relativen ganzen Zahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet und mit diesen gerechnet, ohne denselben einen ziffernmäßig ausgedrückten Wert beizulegen. Jeder Buchstabe konnte ebensogut eine außerordentlich große, wie auch eine relativ kleine Zahl bedeuten. Wenn es sich aber darum handelt, eine ganz bestimmte, eine „besondere Zahl" so anzugeben, daß sie mit keiner anderen verwechselt werden kann, dann spricht man von einer „Darstellung" der Zahl und zwar von einer „systematischen Darstellung", wenn jede Zahl, unter Anwendung derselben Zeichen und derselben Regeln, also mit Hilfe desselben „Systems", dargestellt wird. Die Römer haben ihrer Zahlendarstellung auch schon die Zahl 10 zugrunde gelegt, denn sie bezeichneten diese Zahl mit *X*, deren Quadrat mit *C*, deren Kubus mit *M* oder *CIↃ* und die vierte Potenz mit *CCIↃↃ*, also mit eigenen Zeichen. Gerade darin liegt aber das „Unsystematische" ihrer Zahlenanschreibung, daß sie jede höhere Potenz mit Zeichen belegen, die den Zusammenhang nicht erkennen lassen. Ganz anders verfährt das von den Indern erfundene **„Positions- oder Stellensystem"**, das durch den Verkehr der romanischen Völker mit den Arabern nach Europa gelangte und durch die Eleganz seiner Rechnungsmethoden das schwerfällige Rechnen mit römischen Ziffern allmählich verdrängte. Die neue Rechnungsart wurde zuerst mit Hilfe des **Rechenbrettes** — **Abacus** — ausgeführt. Dieses war in mehrere Kolumnen eingeteilt, welche die Aufschriften *M*, *C*, *X*, *I* trugen und damit die Rolle von Stellenanzeigern übernahmen. In diese Fächer wurden aus Holz oder Horn gefertigte Marken, die „Apices" gesteckt, welche entweder in römischen oder arabischen Zeichen die Ziffern von 1—9 trugen. Ein Nullzeichen war nicht notwendig, denn wenn eine Zahl z. B. keine Hunderter enthielt, so blieb diese Kolumne einfach leer. Die mit dem Rechenbrett vertrauten Mathematiker nannte man „Abacisten". Vermutlich war diese Rechnungsart schon dem bekannten römischen Staatsmanne

und Philosophen Boethius († 524 n. Chr.) bekannt, aber allgemeinere Verbreitung fand sie in Europa erst um das Jahr 1000 n. Chr. Das verbreitetste Rechenbuch der Araber, welches ohne Anwendung des Rechenbrettes, also nur durch Schriftzeichen nach dem gleichen Grundgedanken die Ausführung der wichtigsten Aufgaben lehrte, stammt von Muhammed ibn Musa Alchwarizmi, der zu Anfang des 9. Jahrhunderts zu Bagdad und Damaskus lebte. Sein Name übertrug sich auf das neue Rechenverfahren, das man „Algorithmus" nannte, und dieses Wort bedeutet noch jetzt soviel wie „Rechenverfahren". Die bedeutendsten Vertreter dieser Richtung waren der italienische Kaufmann Leonardo von Pisa, der Verfasser des „Liber abaci" und der Deutsche Jordanus Nemorarius mit seinem Werke „Algorithmus demonstratus".

Nach diesem Algorithmus sollen alle ganzen Zahlen durch eine kleine Gruppe von Ziffern so dargestellt werden, daß jeder Zahl nur eine Gruppe von Ziffern und jeder Zifferngruppe eine **einzige** Zahl entspricht, daß also die Darstellung **eindeutig** ist. Dann muß erörtert werden, welche Rechnungen mit den Ziffern vorzunehmen sind, wenn man mit den durch sie dargestellten Zahlen rechnen will.

Es sei x eine beliebig hohe Zahl, welche mit Hilfe des „dekadischen Algorithmus" dargestellt werden soll. Wir teilen daher deren Einheiten in Gruppen zu je 10 Einheiten und erhalten so y vollständige Gruppen und möglicherweise eine letzte unvollständige Gruppe, welche r Einheiten besitze, wobei $r < 10$. Dann ist also $x = y \cdot 10 + r$. Dasselbe Verfahren, das wir auf die Zahl x angewendet haben, um zum Reste r zu gelangen, können wir auch auf die Zahl y anwenden und dessen Einheiten wieder in neue Gruppen zu je 10 Einheiten teilen, wodurch wir z vollständige Gruppen und einen Gruppenrest $n < 10$ erhalten. Es ist demnach $y = z \cdot 10 + n$ und daher $x = (z \cdot 10 + n) 10 + r = z \cdot 100 + n \cdot 10 + r = z \cdot 10^2 + n \cdot 10 + r$. Ebenso wie mit x und y verfahren wir mit z und finden $z = t \cdot 10 + m$, wobei $m < 10$. Daraus folgt $y = (t \cdot 10 + m) \cdot 10 + n = t \cdot 10^2 + m \cdot 10 + n$, und $x = (t \cdot 10^2 + m \cdot 10 + n) \cdot 10 + r$, also $x = t \cdot 10^3 + m \cdot 10^2 + n \cdot 10 + r$. Schließlich sei $t = k \cdot 10 + l$, also $z = (k \cdot 10 + l) \cdot 10 + m = k \cdot 10^2 + l \cdot 10 + m$, $y = k \cdot 10^3 + l \cdot 10^2 + m \cdot 10 + n$ und $x = k \cdot 10^4 + l \cdot 10^3 + m \cdot 10^2 + n \cdot 10 + r$. Das ist die **allgemeine Form einer fünfziffrigen dekadisch dargestellten Zahl.** Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens müssen wir endlich zu einer Zahl kommen, bei der wir auch nicht einmal eine einzige Gruppe mit 10 Einheiten bilden können und die daher nur als Gruppenrest betrachtet werden kann. Dies sei beim obigen Beispiel für k der Fall. Wenn nämlich schon die größte Zahl x

durch gruppenweises Wegnehmen von je 10 Einheiten erschöpft werden konnte, bis ein Rest $r < 10$ übrigblieb, so muß dies auch bei der mehr als zehnmal kleineren Zahl y und mehr als hundertmal kleineren Zahl z usf. zutreffen. Da alle hier möglichen Reste kleiner als 10 sind, so benötigen wir zur Darstellung derselben nur die neun Ziffern 1—9, und falls eine Gruppeneinteilung ohne Rest bleibt, so deuten wir dies durch das Zeichen 0 an. Wenn wir also die so gefundenen Reste der Reihe nach nebeneinander schreiben, von rechts beginnend, so gibt uns deren Stellung an, welcher Rest bei der Einteilung der ursprünglichen Einheiten oder „Einer", bei der Einteilung der „Zehner", bei der Einteilung der „Hunderter" usw. übriggeblieben ist. So können wir nach wiederholter Division durch 10 mit einer endlichen Anzahl von eindeutig berechneten Ziffern jede noch so große Zahl darstellen, und die so dargestellte Zahl bezeichnet man als eine **„dekadische Zahl"**.

Wenn wir statt der Gruppen zu 10 Einheiten solche zu y Einheiten wählen, so erhalten wir ein **„Zahlensystem mit der Basis oder Grundzahl y"**. Ein Zahlensystem mit der Grundzahl 1 eignet sich zur systematischen Zahlendarstellung schon deshalb nicht, weil es gar keine Reste gibt und die Zahl der Gruppen nicht kleiner als die der ursprünglichen Einheiten wird. Ist die Grundzahl größer als 10, so brauchen wir, abgesehen vom Stellenzeiger Null, noch mehr als 9 Ziffern.

Soll eine dekadisch dargestellte Zahl x in ein anderes Zahlensystem übertragen werden, so kann man in derselben Weise verfahren, wie es oben angegeben wurde, nämlich man dividiert die dekadische Zahl so oft durch die neue Grundzahl, bis der Quotient verschwindet, und schreibt die Divisionsreste als Ziffern an. Man kann auch zuerst alle Potenzen der neuen Grundzahl bilden, bis dieselben größer als die gegebene Zahl sind und dividiert diese zuerst durch die höchste Potenz und jeden folgenden Rest durch die niedrigeren Potenzen. Dann erhält man zuerst die höchsten Stellen, während sich früher zuerst die niedrigeren ergeben haben. Um Zahlen eines anderen Zahlensystems dekadisch darzustellen, multipliziert man die Potenzen des betreffenden Zahlensystems mit den Ziffern ihrer Stellenwerte und addiert die erhaltenen Produkte. Zum gleichen Resultate gelangt man auch, wenn man die Ziffer der höchsten Stelle mit der Grundzahl multipliziert und die zweithöchste Ziffer hinzuzählt, dann diese Summe wieder mit der Grundzahl multipliziert und die dritthöchste Ziffer dazu addiert usw.

Die allgemeine Form einer im Zahlensystem g dargestellten fünfziffrigen Zahl ist also $a_4 g^4 + a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g^1 + a_0$, wobei

der „Index“ der Zahlen a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, welche insgesamt kleiner als g sind, den Stellenwert der damit dargestellten Ziffer erkennen läßt.

Der große Vorteil der mit dem Abakusrechnen eingeführten systematischen Zahlen besteht darin, daß alle Zahlen mit Hilfe der auf wenige Ziffern beschränkten Divisionsreste dargestellt werden und daß deren gegenseitiger Rang nicht durch neue Zeichen, sondern nur durch die Stellung angedeutet wird.

Das Rechnen mit systematisch dargestellten Zahlen.

Es sollen die beiden mit Hilfe der Grundzahl g dargestellten Zahlen $a_4g^4 + a_3g^3 + a_2g^2 + a_1g + a_1$ und $b_4g^4 + b_3g^3 + b_2g^2 + b_1g + b_0$ addiert und ihre **Summe** durch eine im gleichen Zahlensystem ausgedrückte Zahl ersetzt werden. Aus der Gleichheit der Ausdrücke $(a_4g^4 + a_3g^3 + a_2g^2 + a_1g + a_0) + (b_4g^4 + b_3g^3 + b_2g^2 + b_1g + b_0)$ $= (a_4 + b_4)g^4 + (a_3 + b_3)g^3 + (a_2 + b_2)g^2 + (a_1 + b_1)g + (a_0 + b_0)$ folgt, daß wir zu diesem Zwecke jene Glieder vereinigen müssen, welche gleichen Potenzen der Grundzahl g angehören und daher in der Ziffernreihe dieselben Stellenwerte besitzen. Dies zeigt sich im Ausdruck für die Summe darin, daß innerhalb jeder Klammer dieselben Indexzahlen auftreten. Ist die Summe zweier solcher Ziffern gleich oder größer als g, so wird jede in ihr enthaltene Gruppe von g-Einheiten ausgeschieden und dafür dem nächsthöheren Gliede als eine neue Einheit einverleibt, denn „der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn man einen Summand um den Betrag c vermindert und zugleich einen anderen Summand um denselben Betrag vermehrt“. Ist also z. B. $a_1 + b_1 = c_2 \cdot g + d_1$, so findet eine Übertragung von c_2 Einheiten der nächsthöheren Ordnung in der Weise statt, daß wir schreiben: $(a_3 + b_3)g^3 + (a_2 + b_2)g^2 + (a_1 + b_1)g + (a_0 + b_0)$ $= (a_3 + b_3)g^3 + (a_2 + b_2 + c_2)g^2 + d_1g + (a_0 + b_0)$.

In ähnlicher Weise läßt sich das Verfahren der **Subtraktion** systematischer, mithin auch dekadischer Zahlen rechtfertigen. Die Differenz r erscheint dann in der Form $r = (a_2 - b_2)g^2 + (a_1 - b_1)g + (a_0 - b_0)$.

Wenn bei der Ausführung dieser Subtraktionen in einem Gliede eine negative Zahl auftreten müßte, indem z. B. $a_1 < b_1$, so vermindern wir die nächsthöhere Stelle durch Vermehrung des Subtrahenden um eine seiner Einheiten und erhöhen zugleich den Minuend des negativen Gliedes um g-Einheiten der nächstniederen Ordnung, denn es ist

$$(a_2 - b_2)g^2 + (a_1 - b_1)g + (a_0 - b_0)$$
$$= [a_2 - (b_2 + 1)]g^2 + [(a_1 + g) - b_1]g + (a_0 - b_0).$$

Wenn wir also genötigt sind, die Ziffer im Minuend einer dekadischen Zahl um 10 zu erhöhen, so müssen wir dafür die Ziffer der nächsthöheren Stelle im Subtrahenden um eine Einheit vermehren.

Umständlicher gestaltet sich die Ausführung der **Multiplikation** mehrzifferiger Zahlen in systematischer Form. Auch in diesem Falle können wir aus der in allgemeinen Zahlen ausgeführten Rechnung das Verfahren für die Behandlung systematischer Zahlen herauslesen. Die Entwicklung der Teilprodukte ergibt folgendes Resultat:

$$\underline{(a_3g^3+a_2g^2+a_1g+a_0)\cdot(b_3g^3+b_2g^2+b_1g+b_0)=}$$
$$\begin{array}{l} a_3b_3g^6+a_2b_3g^5+a_1b_3g^4+a_0b_3g^3 \\ \qquad a_3b_2g^5+a_2b_2g^4+a_1b_2g^3+a_0b_2g^2 \\ \qquad\qquad a_3b_1g^4+a_2b_1g^3+a_1b_1g^2+a_0b_1g \\ \qquad\qquad\qquad a_3b_0g^3+a_2b_0g^2+a_1b_0g+a_0b_0g \\ \hline a_3b_3g^6+(a_3b_2+a_2b_3)g^5+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)g^4+(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2 \\ +a_0b_3)g^3+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)g^2+(a_1b_0+a_0b_1)g+a_0b_0. \end{array}$$

Wir erhalten wieder eine systematisch dargestellte Zahl von der Form $c_6g^6+c_5g^5+c_4g^4+c_3g^3+c_2g^2+c_1g+c_0$. Dabei werden allerdings die meisten Ausdrücke in den Klammern größer als g sein und daher zu einer Erhöhung der Ziffer an der nächsthöheren Stelle führen. Dies gilt schon vom Produkte der Ziffern an den höchsten Stellen, weshalb das Produkt einer m-zifferigen und einer n-zifferigen Zahl entweder $m+n$ oder $m+n+1$ Ziffern haben kann. Aus der Beschaffenheit der Indexzahlen in den Klammerausdrücken erkennen wir das Gesetz, wie die einzelnen Glieder gebildet werden. So ist z. B. für g_3 im Ausdruck $a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3$ die Summe der Indexzahlen für alle Summanden gleich 3. Darin spricht sich das Gesetz aus, daß jedes Glied des Produktes sich aus solchen Teilprodukten zusammensetzt, deren Faktoren miteinander multipliziert denselben Stellenwert ergeben. Wenn wir somit beim Multiplizieren mit der höchsten Ziffer des Multiplikators beginnen, so müssen wir jedes folgende Teilprodukt um so viele Stellen weiter rechts schreiben, als die betreffende Ziffer im Multiplikator weiter rechts steht.

Bei der Ableitung des **Divisionsverfahrens** handelt es sich wieder um die Beantwortung der Frage, welche Rechenoperationen wir mit den Ziffern des Dividenden und Divisors vorzunehmen haben, um die Ziffern des Quotienten zu erhalten. Dies ergibt sich, wenn wir überlegen, wie sich die Ziffern b_3, b_2, b_1 und b_0 ermitteln lassen, falls das Produkt

$$\begin{array}{l} p=a_3b_3g^6+(a_3b_2+a_2b_3)g^5+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)g^4 \\ +(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3)g^3+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)g^2 \\ +(a_1b_0+a_0b_1)g+a_0b_0 \end{array}$$

und der eine Faktor $a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$ gegeben sind. Wir sehen hieraus, daß wir die erste Ziffer des Quotienten und deren Stellenwert aus den beiden höchsten Ziffern des Dividenden und Divisors durch die Division finden $(a_3 b_3 g^6) : a_3 g^3 = b_3 g^3$.

Im Dividend von der Form $c_6 g^6 + c_5 g^5 + c_4 g^4 + c_3 g^3 + c_2 g^2 + c_1 g + c_0$ stellt die Ziffer c_6 aber nicht allein das Produkt $a_3 b_3$ vor, sondern sie enthält möglicherweise auch noch jene Beträge der vorausgehenden Stellen, um welche sie den Wert der Ziffer 9 übersteigen. Ist in $c_6 : a_3$ kein ganzzahliger Quotient enthalten, so müssen wir den größten ganzzahligen Wert im Quotienten von $(c_6 g + c_5) g^5 : (a_3 g^3)$ aufsuchen. Hat der Dividend m Stellen und der Divisor n, so hat der Quotient im ersten Fall $m - n$, im letzteren Fall $m - n - 1$ Ziffern.

Um die zweite Ziffer des Quotienten zu finden, müssen wir vom Dividenden alle Teilprodukte, die aus der Multiplikation des Divisors mit der ersten Ziffer des Quotienten entstehen, subtrahieren und erhalten so den Rest.

$$\begin{aligned} R_1 = [&a_3 b_3 g^6 + (a_3 b_2 + a_2 b_3) g^5 + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) g^4 \\ &+ (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3) g^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) g^2 \\ &+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + a_0 b_0] - [a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0] b_3 g^3 \\ = &a_3 b_2 g^5 + (a_3 b_1 + a_2 b_2) g^4 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2) g^3 \\ &+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) g^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + a_0 b_0, \end{aligned}$$

dessen höchste Stelle $a_3 b_2 g^5$ wieder die zweite Ziffer des Quotienten b_2 als Faktor enthält; mithin finden wir dieselbe durch die Division $(a_3 b_2 g^5) : (a_3 g^3) = b_2 g^2$, wobei b_2 nur die größte ganze Zahl bedeutet, die sich bei der Division der Ziffern ergibt. Um die dritte Ziffer zu ermitteln, bilden wir zuerst den Rest $R_2 = [a_3 b_2 g^5 + (a_3 b_1 + a_2 b_2) g^4 + (a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2) g^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) g^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + a_0 b_0] - [a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0] \cdot b_2 g^2 = a_3 b_1 g^4 + (a_3 b_0 + a_2 b_1) g^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1) g^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + a_0 b_0$ und dividieren dann wieder das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors; so finden wir $(a_3 b_1 g^4) : (a_3 g^3) = b_1 g$, also die dritte Ziffer und deren Stellenwert. Der neue Rest ist $R_3 = [a_3 b_1 g^4 + (a_3 b_0 + a_2 b_1) g^3 + (a_2 b_0 + a_1 b_1) g^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) g + a_0 b_0] - (a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0) b_1 g = a_3 b_0 g^3 + a_2 b_0 g^2 + a_1 b_0 g + a_0 b_0$. Schließlich folgt aus $(a_3 b_0 g^3) : (a_3 g^3) = b_0$, daß diese Zahl die letzte Ziffer des Quotienten ist, da der Rest $R_4 = [a_3 b_0 g^3 + a_2 b_0 g^2 + a_1 b_0 g + a_0 b_0] - (a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0) b_0 = 0$.

Damit ist gezeigt, daß wir zur Bestimmung der Ziffern des Quotienten nur die ersten und höchsten Stellen im Dividend und Divisor benötigen, wie es beim üblichen Verfahren auch durchwegs geübt wird, daß aber immer das Produkt aus dem ganzen Divisor und der letzten Ziffer des Quotienten vom früheren Dividend sub-

trahiert werden muß. Die den gefundenen Ziffern b_3, b_2, b_1, b_0 entsprechende systematische Zahl ist dann erst der gesuchte Quotient.

Die Teilbarkeit dekadischer Zahlen.

Auf Grund der bisherigen Erörterungen lassen sich die Regeln über die Teilbarkeit ganzer Zahlen von einem allgemeineren und einheitlichen Standpunkte aus behandeln. Ein Ausdruck von der Form $z = a_4 g^4 + a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$ ist durch eine ganze Zahl m teilbar, wenn alle Summanden durch dieselbe teilbar sind.

Daraus ergibt sich zunächst die einfachste Teilbarkeitsregel: Eine systematisch dargestellte, dekadische oder nichtdekadische Zahl z ist durch eine Zahl m teilbar, wenn alle Ziffern durch dieselbe teilbar sind oder wenn sie nur aus teilbaren Zifferngruppen besteht.

Auf diesem Wege erkennen wir sofort, daß z. B. 77 777 durch 7 und 8888 durch 2,4 und 8 teilbar ist, und aus dem zuletzt angeführten Grunde ist 431 004 310 durch 431 teilbar und 46023 durch 23, weil 46 und 23 durch 23 teilbar sind.

Eine weitere allgemeine Teilbarkeitsregel ergibt sich, wenn wir die Teilbarkeit der Potenzen von g in Rechnung ziehen und zu diesem Zwecke die Reste r_1, r_2, r_3 usw. berechnen, die sich bei der Division der Potenzen von g durch m ergeben. Ist demnach $g = q_1 \cdot m + r_1$, $g^2 = q_2 \cdot m + r_2$, $g^3 = q_3 \cdot m + r_3$, und $g^4 = q_4 \cdot m + r_4$, so ist

$$z = a_4 (q_4 \cdot m + r_4) + a_3 (q_3 \cdot m + r_3) + a_2 (q_2 \cdot m + r_2) + a_1 (q_1 \cdot m + r_1) + a_0$$
$$= (a_4 \cdot q_4 + a_3 q_3 + a_2 q_2 + a_1 q_1) m + (a_4 r_4 + a_3 r_3 + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0)$$
$$= Q \cdot m + S.$$ Daraus folgt:

Eine Zahl $z = a_4 g^4 + a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$ ist durch m teilbar, wenn die Summe $S = a_4 r_4 + a_3 r_3 + a_2 r_2 + a_1 r_1 + a_0$ durch m teilbar ist.

Wenden wir diese Regel auf den Fall $g = 10$ und $m = 2$ an, so finden wir, daß $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \ldots = 0$ und daher $S = a_0$. Desgleichen ist dies auch für $m = 5$ der Fall.

Durch 2 oder 5 ist also eine Zahl z teilbar, wenn die Ziffer an der Einerstelle durch 2, bzw. 5 teilbar ist.

Für die Zahlen 4 und 25 ist $r_2 = r_3 = r_4 = \ldots\ldots = 0$ und daher $S = a_1 r_1 + a_0$. Für $m = 4$ ist $r_1 = 2$ und daher z durch 4 teilbar, wenn $2 \cdot a_1 + a_0$ durch 4 teilbar ist. Dies ist aber auch dann der Fall, wenn $a_1 \cdot 10 + a_0$ durch 4 teilbar ist, was sich bei zweiziffrigen Zahlen leichter beurteilen läßt als die Teilbarkeit des

Ausdruckes $2 \cdot a_1 + a_0$. Für 25 ist $r_1 = 10$ und daher $s = a_1 \cdot 10 + a_0$. Wir können daher in beiden Fällen die Regel aufstellen:

Jene dekadischen Zahlen sind durch 4 oder 25 teilbar, deren zwei niedrigste Stellen zusammen eine durch 4 oder 25 teilbare Zahl bilden.

Durch 8 oder 125 sind jene dekadischen Zahlen teilbar, deren drei niedrigste Stellen zusammen eine durch 8 oder 125 teilbare Zahl ergeben.

Bezüglich 125 ist dies der Fall, weil $r_1 = 10$ und $r_2 = 100$ und $r_3 = r_4 = \ldots = 0$, also ist $S = a_2\ 100 + a_1\ 10 + a_0$. Für 8 ist ebenfalls $r_3 = r_4 = \ldots 0$, aber $r_1 = 2$ und $r_2 = 4$. Wir erhalten daher $S = 4 \cdot a_2 + 2 \cdot a_1 + a_0$, bei einer dreiziffrigen Zahl läßt sich deren Teilbarkeit durch 8 ebenso rasch durch unmittelbare Division feststellen als die Teilbarkeit von S. Da aber $z = a_2\, 100 + a_1 \cdot 10 + a_0 + 8 \cdot 125\,(a_3 + a_4 \cdot 10)$ und der letzte Summand immer durch 8 teilbar ist, so ergibt sich die Teilbarkeit durch 8 schon aus der von $a_0 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Für 3 und 9 ist $r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = 1$, denn $10 = 3 \cdot 3 + 1$ und $10 = 1 \cdot 9 + 1$. Ebenso läßt sich auch jede folgende Potenz als ein um 1 vermehrtes Vielfaches von 3, bzw. von 9 darstellen. Wenn nämlich $10^n = 3\,q_1 + 1$, so ist $10^{n+1} = 10\,(3\,q_1 + 1) = 3 \cdot 10\,q_1 + 10 = 3 \cdot 10 q_1 + 3 \cdot 3 + 1 = 3(10q + 3) + 1 = 3 q_2 + 1$; ebenso folgt aus $10^n = 9 \cdot q_1 + 1$, daß auch $10^{n+1} = 9\,q_2 + 1$; ist also $10^2 = 3\,q_2 + 1$, $10^3 = 3\,q_3 + 1$ usw. und $10^2 = 9\,q_1 + 1$, $10^3 = 9\,q_2 + 1$ usw.

Mithin ist z. B. für eine fünfziffrige Zahl $S = a_4\,r_4 + a_3\,r_3 + a_2\,r_2 + a_1\,r_1 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ die Ziffernsumme. Daher besteht die bekannte Regel:

Durch 3 und 9 sind alle dekadischen Zahlen teilbar, deren Ziffernsumme durch 3, bzw. 9 teilbar ist.

Da man im Altertum vielfach in der Weise rechnete, daß man jede neu berechnete Ziffer an Stelle der weggelöschten alten setzte, so war eine neuerliche Durchsicht der Zwischenrechnungen ausgeschlossen, und es stellte sich daher das Bedürfnis ein, die Richtigkeit des Resultates auf möglichst einfachem Wege nur mit Hilfe der Angaben zu prüfen. Dies erreichte man, wenn auch nicht mit unbedingter Sicherheit, so doch mit großer Wahrscheinlichkeit durch Anwendung der „Neunerprobe“. Um den „Nennerrest“, d. h. den Rest zu finden, der bei der Division durch 9 bleibt, braucht man nicht die Zahl z selbst, sondern nur deren Ziffernsumme zu untersuchen, weil $z = 9 \cdot q_1 + S$ und daher für $S = 9 \cdot q_2 + r$ zugleich $z = 9 \cdot (q_1 + q_2) + r$. Wenn wir also die Summe mehrerer dekadischer Zahlen zu bilden haben, so muß dieselbe denselben Neunerrest r geben, wie die Summe der

Neunerreste aller Summanden, denn es ist $z_1 + z_2 = 9(q_1 + q_2) + r_1 + r_2$, wenn $z_1 = 9q_1 + r_1$ und $z_2 = 9q_2 + r_2$. Ist also $r_1 + r_2 = 9q_3 + r_3$, so muß $z_1 + z_2 = 9(q_1 + q_2 + q_3) + r_3$ denselben Neunerrest r_3 haben, wie $r_1 + r_2$. Ebenso hat auch die Differenz zweier dekadischer Zahlen denselben Neunerrest, wie die Differenz der Neunerreste des Minuenden und Subtrahenden, denn $z_1 - z_2 = 9(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$ und $r_1 - r_2$ ist daher sowohl Neunerrest der Differenz $z_1 - z_2$, als auch Differenz der beiden Neunerreste r_1 und r_2.

Das Produkt zweier dekadischer Zahlen hat denselben Neunerrest wie das Produkt der Neunerreste der Faktoren. Unter Anwendung der obigen Bezeichnungen ergibt sich nämlich: $z_1 \cdot z_2 = 9 \cdot 9 \cdot q_1 \cdot q_2 + 9(q_2 r_1 + q_1 r_2) + r_1 r_2$. Ist daher $r_1 r_2 = 9q_3 + r_3$, so folgt $z_1 \cdot z_2 = 9(9 q_1 q_2 + r_1 q_2 + r_2 q_1 + q_3) + r_3$. $r_1 r_2$ ist das Produkt der Neunerreste der Faktoren z_1 und z_2 und hat also denselben Neunerrest r_3 wie $z_1 \cdot z_2$.

Dieser Satz läßt sich auch auf das Resultat einer Division anwenden. Gibt dieselbe keinen Rest und ist $z_1 : z_2 = z_3$, also $z_1 = z_2 \cdot z_3$, so muß der Neunerrest von z_1 gleich dem Neunerrest des Produktes der Neunerreste von z_2 und z_3 sein. Ist aber $z_1 = z_2 \cdot z_3 + y$, so muß der Neunerrest r_1 von z_1 derselbe sein wie der von $r_2 \cdot r_3 + r_4$ nämlich r_5, also $r_1 = r_5$, falls $z_1 = 9q_1 + r_1$, $z_2 = 9q_2 + r_2$, $z_3 = 9q_3 + r_3$, $y = 9q_4 + r_4$ und $r_2 r_3 + r_4 = 9q_5 + r_5$. Dies ist der Fall, weil der Neunerrest von $z_2 \cdot z_3$ dieselbe Zahl ist, wie der Neunerrest von $r_2 r_3$, und daher auch der von $z_2 \cdot z_3 + y$ gleich dem von $r_2 r_3 + r_4$, nämlich r_5 ist. Berechnen wir also r_5 aus $z_2 z_3$ und y und r_1 aus z_1, so müssen wir gleiche Werte erhalten. Die Neunerprobe versagt aber, wenn der Fehler im Resultate gerade 9 oder ein Vielfaches von 9 beträgt, denn in diesem Falle stimmt die Neunerprobe, während das Resultat falsch ist. Da es also nur unwahrscheinlich ist, daß der Fehler gerade diese Größe hat, so ist eine solche Bestätigung des Resultates nur dann von Bedeutung, wenn sie sehr rasch erfolgen kann. Dagegen hat dieselbe insofern bleibenden Wert, als sich hieraus eine nicht nur für 9, sondern auch für andere Zahlen gültige „zahlentheoretische“ Beziehung zwischen den Resultaten der Rechnungsoperationen und den analogen Ausdrücken mit den entsprechenden Divisionsresten herstellt.

Erweiterung des Zahlengebietes durch die Division.

Ist q eine ganze Zahl, die mit dem Divisor b multipliziert den Dividend a gibt, daß also $a = bq$, so bezeichnen wir diese Zahl als den Quotient der Division $a : b$. Wenn aber $a = bq + r$, wobei

$0 < r < b$, so nannten wir r den Rest der Division $a:b$. In diesem Falle, oder wenn von vornherein $a < b$ ist, kann $a:b$ durch ganze Zahlen entweder gar nicht oder wenigstens nicht genau dargestellt werden; $\frac{a}{b}$ läßt sich dann nicht mehr als ganze Zahl betrachten; wir können aber trotzdem mit diesem neuen Zahlengebilde rechnen, weil wir wissen, welche Rechnungsoperationen mit Dividend und Divisor ausgeführt werden müssen, um eine bestimmte Rechnung mit ihrem Quotient auszuführen. Solche Zahlengebilde nennen wir „gemeine Brüche", und zwar „echte Brüche", wenn der $a < b$ ist und „unechte Brüche", wenn $a > b$. Die Zahl, welche die Rolle des Dividenden übernimmt, heißt hier „Zähler", der Divisor „Nenner".

Die Differenz zweier gleicher Zahlen hat eine Erweiterung des Zahlengebietes durch Einführung der „Null" hervorgerufen. Der Quotient zweier gleicher Zahlen führt aber nicht zu einer neuen Zahl, sondern zur „Einheit" der natürlichen Zahlen. Wenn wir irgend eine natürliche Zahl, z. B. $a = 7$ durch Null dividieren wollen, so stoßen wir auf eine eigenartige Schwierigkeit. $7:0$ müßte eine Zahl sein, die mit Null multipliziert die natürliche Zahl 7 gibt, während wir seinerzeit gezeigt haben, daß jede natürliche Zahl mit Null multipliziert, Null als Produkt gibt. Dies widerspricht dem arithmetischen Grundgesetz von der Eindeutigkeit aller Rechnungsoperationen. Daraus folgt: **Die Division durch Null ist arithmetisch unzulässig.**

Da zwei ganzzahlige Quotienten $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$ einander gleich sind, wenn $a' \cdot d' = c' \cdot b'$ und a' durch b' und c' durch d' teilbar ist, so werden wir auch zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ als gleichwertig ansehen, wenn $a \cdot d = c \cdot b$ und weder a durch b, noch c durch d teilbar ist, denn nur in diesem Falle läßt sich der Satz aufrecht halten, daß Gleiches mit Gleichem multipliziert gleiche, und zwar ganzzahlige Produkte gibt. Wir stellen deshalb fest:

Zwei Brüche haben denselben Wert, wenn das Produkt aus dem Zähler des ersten und dem Nenner des zweiten, dem Produkte aus dem Zähler des zweiten und dem Nenner des ersten Bruches gleich ist.

Daraus folgt:

Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert — den Bruch „erweitert" — oder wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert — den Bruch „abkürzt".

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, falls $a \cdot d = c \cdot b$, so ist demnach $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, weil $am \cdot b = a \cdot bm$. Wenn ferner $a:n = p$ und $b:n = q$ und somit $a = n \cdot p$ und $b = n \cdot q$, so ist $\frac{a:n}{b:n} = \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$, weil $p \cdot b = a \cdot q$ und daher auch $(n\,p) \cdot b = a \cdot b = n \cdot (a\,q) = a \cdot (n\,q) = a\,b$.

Die gemeinen Brüche stehen mit den bisher behandelten ganzen Zahlen durch folgende Definition in Verbindung:

Unter einem gemeinen Bruch $\left(\frac{a}{b} = x\right)$ verstehen wir eine neue von den ganzen Zahlen verschiedene solche Zahl (x), die mit dem Nenner (b) multipliziert ($x\,b$) den Zähler (a), also wieder eine ganze Zahl liefert.

Falls Zähler und Nenner auch negative Zahlen sein können, müssen wir im Anschluß an die Bestimmung des Vorzeichens bei ganzzahligen Quotienten den Bruch als positiv betrachten, wenn Zähler und Nenner gleichbezeichnet sind und als negativ, wenn Zähler und Nenner ungleich bezeichnet sind. **Wir haben deshalb auch die gebrochenen Zahlen als relative aufzufassen.**

Durch die Angliederung der positiven und negativen gemeinen Brüche an das Zahlengebiet der relativen ganzen Zahlen entsteht das **Zahlengebiet der rationalen Zahlen**, das durch die Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division keine fernere Erweiterung erfahren kann, solange wir diese Operationen nur in endlicher Anzahl vornehmen.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Während wir uns bereits daran gewöhnt haben und einen großen Vorteil darin erblicken, mit den Dezimalbrüchen genau so rechnen zu können wie mit ganzen dekadischen Zahlen, bestand seit den ältesten Zeiten bis zum Anbruch des Renaissancezeitalters zwischen dem Rechnen mit ganzen und gebrochenen Zahlen ein wesentlicher Gegensatz. Die alten Ägypter rechneten aber mit den Brüchen nur in der Weise, daß sie dieselben auf die sogenannten „Stammbrüche“ zurückführten, d. h. auf Brüche, deren Zähler 1 ist. Diese Rechnungsart ging von ihnen auf die Griechen und von diesen auf die Araber über, welche dann im Mittelalter die romanischen Völker im gleichen Sinne beeinflußten. Die orientalischen Völker legten dagegen der Bruchrechnung den konstanten Nenner 60 zugrunde, da bei ihnen vielfach das Sexagesimalsystem ge-

bräuchlich war. Dies bringt den großen Vorteil mit sich, daß sich die gebräuchlichsten Bruchformen sehr einfach ausdrücken. $^1/_2$ entspricht 30 Untereinheiten, $^1/_3$ kann durch 20, $^1/_4$ durch 15, $^1/_5$ durch 12, $^1/_6$ durch 10, $^1/_{10}$ durch 6 Sechzigstel usw. dargestellt werden. Auch die praktisch denkenden alten Römer legten dem Bruchrechnen einen unveränderlichen Nenner zugrunde, nämlich 12. Der zwölfte Teil der „as", ihrer gebräuchlichsten Münze, war die „uncia". „Septunx" bedeutet 7. Auch die Teilung der Einheit in Zwölftel gestattet die einfachsten Brüche in Zwölfteln auszudrücken, also $^1/_2$ durch 6, $^1/_4$ durch 3, $^1/_3$ durch 4, was bei der Darstellung durch Zehntel nicht so bequem möglich ist. An der Universität Wien lehrte Johann von Gmunden († 1442) neben dem Rechnen mit gemeinen Brüchen auch das Rechnen mit Sexagesimalbrüchen, das formell mit dem Rechnen nach Graden, Minuten und Sekunden übereinstimmt. Sein Nachfolger Georg von Peurbach († 1461) ging bereits auch auf Dezimalbrüche ein, aber erst Johann Müller aus Königsberg in Franken, der unter dem Namen „Regiomontanus" zu großer Berühmtheit gelangte, vermochte auf diesem Gebiete größere Erfolge zu erzielen. Seitdem tritt das Rechnen mit gemeinen Brüchen, das lange Zeit hindurch einen hervorragenden Teil des Universitätsunterrichtes bildete, im Vergleich zum Rechnen mit systematischen, und zwar dekadischen Brüchen immer mehr in den Hintergrund.

Da bei der Erörterung über das Rechnen mit Produkten und Quotienten die Ausführbarkeit dieser Operation in ganzen Zahlen vorausgesetzt wird und daher auf eine Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen hinausläuft, so muß die Addition und Subtraktion der gemeinen Brüche neu begründet werden.

Haben zwei Brüche gleichen Nenner, so ist deren Summe ein Bruch, dessen Zähler die Summe der Zähler der Summanden und dessen Nenner der gemeinsame Nenner ist. Brüche mit verschiedenen Nennern werden addiert, indem man sie zuerst durch Erweitern auf gleichen Nenner bringt und dann die Summe der Zähler als Zähler und den gemeinsamen Nenner als Nenner setzt.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Daß $\frac{a+b}{n}$ als Summe von $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ zu betrachten ist, ergibt sich aus folgender Erwägung. Da alle diese neuen Zahlenwerte mit n multipliziert, bzw. die ganzen Zahlen $a+b$, a und b geben, so müssen wir $\frac{a+b}{n}$ als Summe ansehen, weil diese Zahl mit dem

Nenner multipliziert die Summe jener ganzen Zahlen ergibt, die wir durch Multiplikation mit dem gleichnamigen Nenner aus den beiden Summanden $\frac{a}{n}$ und $\frac{b}{n}$ erhalten. Nachdem wir die Addition von Brüchen kennen gelernt haben, läßt sich auch feststellen, daß von zwei Brüchen derjenige den größeren Zahlenwert hat, welcher den größeren Zähler aufweist, wenn wir beide auf denselben Nenner bringen. Es ist also $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$, wenn $a = b + d > b$, denn $\frac{a}{n} = \frac{b+d}{n} = \frac{b}{n} + \frac{d}{n} > \frac{b}{n}$. Ferner ist jeder echte positive Bruch größer als Null, denn auch für $a < n$ ist $\frac{a}{n} > \frac{0}{n} = 0$, wenn $a > 0$ ist.

Aus der Regel über die Bildung der Summe zweier Brüche ergibt sich unmittelbar die Bildung ihrer Differenz.

Zwei auf gleichen Nenner gebrachte Brüche werden voneinander subtrahiert, indem man die Differenz der Zähler im Minuend und Subtrahend als Zähler und den gemeinsamen Nenner als Nenner setzt.

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus

$$\frac{a}{n} = \frac{a-b}{n} + \frac{b}{n} = \frac{(a-b)+b}{n} = \frac{a}{n}.$$

Diese beiden Regeln umfassen auch jene Fälle, wo es sich darum handelt, einen echten Bruch zu einer ganzen Zahl zu addieren oder von derselben zu subtrahieren, wenn wir die ganze Zahl als einen Quotient auffassen, dessen Nenner die Einheit ist. Jede ganze Zahl kann als Bruch mit gegebenem Nenner dargestellt werden, wenn wir als Zähler das Produkt aus diesem Nenner und der Zahl verwenden. Die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch bezeichnet man als einen **„gemischten Bruch"**. Die übliche Anschreibeweise derselben, z. B. $3^1/_2$, entspricht nicht mehr unserer Darstellung der dadurch angedeuteten Rechnungsoperationen, sondern sie ist ein Überbleibsel aus der Zeit, wo man überhaupt keine Operationszeichen verwendete und die Summanden ohne Additionszeichen nebeneinander schrieb.

Auch die Subtraktionen ganzer und gebrochener Zahlen, bei welchen der Subtrahend größer ist als der Minuend, führen zu **negativen gebrochenen Zahlen,** die mit den **positiven gebrochenen,** sowie auch mit den **positiven** und **negativen ganzen Zahlen** das **Gebiet der rationalen Zahlen** ausmachen.

Eine ganze Zahl wird mit einem Bruch oder dieser mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man das Produkt aus dem Zähler und der Zahl als Zähler und den Nenner des Bruches als Nenner setzt.

$$a \cdot \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \cdot a = \frac{ab}{n}.$$

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler des Bruches als Zähler und das Produkt aus dem Nenner und der Zahl als Nenner setzt.

$$\frac{a}{n} : b = \frac{a}{bn}.$$

Beide Regeln stützen sich auf den Grundsatz, daß diese Rechnungsoperationen davon unabhängig sein müssen, ob der Dividend eines Quotienten durch den Divisor teilbar ist oder nicht, d. h. ob der Quotient $\frac{a}{n}$ eine ganze Zahl oder ein gemeiner Bruch ist, daß also dieselben für das ganze Gebiet der rationalen Zahlen gleich seien.

Aus den beiden letzten Regeln ergibt sich ferner die Multiplikation eines Bruches mit einem andern Bruche. Sie muß in derselben Weise erfolgen, wie die Multiplikation zweier ganzzahliger Quotienten. Daß $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$ folgt daraus, daß $\left(\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n}\right) mn = \left(\frac{a}{m} \cdot m\right) \cdot \left(\frac{b}{n} \cdot n\right) = ab$.

Mithin muß für die Multiplikation zweier Brüche die Regel bestehen:

Zwei gemeine Brüche werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler als Zähler und das Produkt der Nenner als Nenner setzt.

Da schließlich für ganzzahlige Quotienten $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$, weil $\frac{an}{bm} \cdot \frac{b}{n} = \frac{abn}{bmn} = \frac{a}{m}$ und auch $\frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} = \frac{an}{bm}$, so gilt auch für die Division zweier Brüche die Regel:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} = \frac{an}{bm}.$$

Das Resultat ist also dasselbe, als hätten wir den Bruch $\frac{a}{m}$ mit dem Bruche $\frac{n}{b}$ multipliziert, den man als den „reziproken Wert" des Bruches $\frac{b}{n}$ bezeichnet.

Man pflegt daher diese Regel im Anschluß an die frühere mit den Worten auszudrücken:

Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den ersten mit dem reziproken Wert des zweiten multipliziert.

Als eine Folgerung aus dem Satze über die Multiplikation von Brüchen ergibt sich:

Ein gemeiner Bruch wird zur n-ten Potenz erhoben, indem man die n-te Potenz des Zählers als Zähler und die n-te Potenz des Nenners als Nenner setzt. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Alle diese Rechnungen lassen sich auch mit besonderen Zahlen ausführen und durch Rechnungen mit dekadischen Zahlen ersetzen. Wenn wir aber mit allgemeinen, d. h. mit solchen Zahlen rechnen, die nur durch Buchstaben und nicht durch Ziffern, oder wenigstens nicht ausschließlich mit Ziffern dargestellt sind, so bleiben die obigen Regeln in Geltung, gleichviel ob die dadurch dargestellten Zahlen ganze oder gebrochene sind. Gewöhnlich sucht man es zu vermeiden, daß im Zähler oder Nenner selbst noch Brüche verwendet werden, falls dadurch eine Vereinfachung des Ausdruckes erzielt wird.

Aus der Division mit ungleichen Zahlen ergeben sich für positive Größen folgende Regeln:

Wenn man zwei ungleiche Größen durch dieselbe Zahl dividiert, so ergibt der größere Dividend den größeren Quotient.

Aus $a > b$ folgt $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. Wenn nämlich $a > b$, so ist $a = b + d$ und $d > 0$. Es ist daher $\frac{a}{c} = \frac{b+d}{c} = \frac{b}{c} + \frac{d}{c} > \frac{b}{c}$.

Wird von zwei gleichen Größen erstere durch eine größere Zahl dividiert, so ergibt sie einen kleineren Quotient.

Wenn $a > b$, so ist $\frac{c}{a} < \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b} > \frac{c}{a}$, wenn die Differenz $\frac{c}{b} - \frac{c}{a}$ einen positiven Wert hat und, dies ist der Fall, da $\frac{c}{b} - \frac{c}{a} = \frac{ca - cb}{ab} = \frac{c(a-b)}{ab} > 0$, weil $a - b > 0$ und auch alle andern Größen als positiv angenommen werden.

Wenn die größere von zwei ungleichen Zahlen durch die kleinere von zwei andern ungleichen Zahlen dividiert wird, so erhalten wir auch einen größeren Quotienten.

Wenn $a > b$ und $c < d$, so ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, denn zufolge den vorausgegangenen Sätzen ist $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} > \frac{b}{d}$.

Wenn $a > b$ und $c > d$, so läßt sich ohne nähere Angaben über den Größenunterschied der Quotienten $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{d}$ nichts sagen.

Wenn zwei ungleiche Zahlen mit „— 1" multipliziert, bzw. ihre Vorzeichen geändert werden, so geht zugleich das sie verbindende Ungleichheitszeichen in das entgegengesetzte über, weil diejenige von zwei negativen Zahlen als die kleinere aufgefaßt werden muß, die den größeren absoluten Wert besitzt.

Das Rechnen mit endlichen Dezimalbrüchen.

Bei der Erweiterung des Zahlengebietes von den natürlichen auf die relativen und von den ganzen auf die rationalen Zahlen haben wir uns vom Grundsatz leiten lassen, daß für die Zahlen des erweiterten Gebietes dieselben Rechnungsgesetze gelten sollen, welche für das ursprüngliche Gebiet abgeleitet wurden. Denselben Grundsatz wenden wir im folgenden auch auf die **Darstellungsform** der Zahlen an und untersuchen, ob wir auch die gebrochenen Zahlen in systematischer Form, und zwar im dekadischen Zahlensystem anschreiben und ob wir mit den so geschriebenen Zahlen auch wie mit dekadischen ganzen Zahlen rechnen können. Der an der Wiener Universität lehrende Mathematiker Regiomontanus suchte (1467) die darauf hingerichteten Bestrebungen seiner Vorgänger in der Weise zu verwirklichen, daß er — wie die Babylonier allen Bruchrechnungen den Nenner 60 zugrunde legten — als Nenner, oder vielmehr als Einheit niederer Ordnung, die Zahl 100000 wählte und alle Brüche durch Vielfache dieses Einheitsnenners darstellte. Vieta in Paris deutet die Größe des Nenners ähnlich wie wir dadurch an, daß er die Dezimalstellen durch einen vertikalen Strich von den Ganzen trennte, und damit führte er im wesentlichen den Gebrauch des Dezimalpunktes ein. Die weitgehendsten Bestrebungen in diesem Sinne entwickelte der Ingenieur Simon Stevin in Holland, der bereits darauf ausging, nicht nur das Rechnen dekadisch durchzuführen, sondern auch die Einführung dekadisch aufgebauter Maß- und Münzsysteme zu erwirken. Hervorragenden Einfluß übten in dieser Richtung auch der Schweizer Joost Bürgi (1632), der große deutsche Astronom Johannes Kepler (1630) und in Italien Cavalieri (1647) in Bologna aus.

Der Ausdruck

$$a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3}$$

stellt eine nicht nur aus Dezimalstellen, sondern auch aus Ganzen zusammengesetzte Dezimalzahl dar, wobei die mit einem Index versehenen Buchstaben Ziffern bedeuten. Die positiven Indexzahlen bedeuten ganzzahlige Stellen, der Index 0 die Einerstelle und die negativen Indexzahlen die Dezimalstellen. Die Indexzahl gibt also die Entfernung der Stelle von den Einern an. Jeden solchen Ausdruck können wir als einen Bruch mit dem gemeinsamen Nenner der niedrigsten Stelle darstellen, wobei der Zähler die Form einer ganzen dekadischen Zahl annimmt, die wir auch kurz mit A bezeichnen:

$$a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3}$$
$$= \frac{a_2 \cdot 10^5 + a_1 \cdot 10^4 + a_0 \cdot 10^3 + a_{-1} \cdot 10^2 + a_{-2} \cdot 10 + a_{-3}}{10^3} = \frac{A}{10^3}.$$

Die Summe zweier solcher Zahlen erhalten wir durch Addition der Glieder mit gleichem Nenner. Stellen wir jede solche Zahl in der obigen Form und mit derselben Potenz von 10 als Nenner dar, so erhalten wir, wenn

$$\frac{A}{10^3} = \frac{a_2 \cdot 10^5 + a_1 \cdot 10^4 + a_0 \cdot 10^3 + a_{-1} \cdot 10^2 + a_{-2} \cdot 10 + a_{-3}}{10^3} \quad \text{und}$$
$$\frac{B}{10^3} = \frac{b_2 \cdot 10^4 + b_1 \cdot 10^3 + b_0 \cdot 10^2 + b_{-1} \cdot 10 + b_{-2}}{10^2},$$

$$\left(a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3}}{10^3}\right)$$
$$+ \left(b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0 + \frac{b_{-1}}{10} + \frac{b_{-2}}{10^2}\right) = (a_2 + b_2) \cdot 10^2$$
$$+ (a_1 + b_1) \cdot 10 + (a_0 + b_0) + \frac{a_{-1} + b_{-1}}{10} + \frac{a_{-2} + b_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3} + 0}{10^3}$$
$$= \frac{(a_2+b_2) \cdot 10^5 + (a_1+b_1) \cdot 10^4 + (a_0+b_0) \cdot 10^3 + (a_{-1}+b_{-1}) \cdot 10^2 + (a_{-2}+b_{-2}) 10 + (a_{-3}+0)}{10^3}$$
$$= \frac{A}{10^3} + \frac{B}{10^2} = \frac{A}{10^3} + \frac{B \cdot 10}{10^3} = \frac{A + B \cdot 10}{10^3}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für die Bildung einer Differenz dieser Zahlen:

$$\frac{A}{10^3} - \frac{B}{10^2} = \frac{A}{10^3} - \frac{B \cdot 10}{10^3} = \frac{A - B \cdot 10}{10^3} = (a_2 - b_2)\, 10^2$$
$$+ (a_1 - b_1) \cdot 10 + (a_0 - b_0) + \frac{a_{-1} - b_{-1}}{10} + \frac{a_{-2} - b_{-2}}{10^2} + \frac{a_{-3} - 0}{10^3}.$$

Allgemein: $\frac{A}{10^{m+n}} \pm \frac{B}{10^m} = \frac{A \pm B \cdot 10^n}{10^{m+n}}$.

Diese Ergebnisse können wir in die Regel zusammenfassen:

Dezimalbrüche werden zueinander addiert, beziehungsweise voneinander subtrahiert wie ganze Zahlen, die Vielfache der Einer der niedrigsten Stelle darstellen.

Sind $\frac{A}{10^m}$ und $\frac{B}{10^n}$ zwei Dezimalzahlen mit m, beziehungsweise n Dezimalstellen, so ist deren Produkt $\frac{A}{10^m} \cdot \frac{B}{10^n} = \frac{A \cdot B}{10^{m+n}}$ eine Dezimalzahl mit $m+n$ Dezimalstellen. Die Regel für die Multiplikation zweier Dezimalstellen lautet daher:

Zwei Dezimalstellen werden miteinander multipliziert wie ganze Zahlen, und im Produkt ist die Zahl der Dezimalstellen gleich der Summe der Dezimalstellen in beiden Faktoren.

Hieraus ergibt sich zugleich, wie eine Dezimalzahl mit einer Potenz von 10 multipliziert oder durch eine solche dividiert wird. Setzen wir nämlich im ersten Fall $\frac{B}{10^n} = \frac{10^r}{10^n}$ und nehmen wir an, es sei $r = n + s$, also $n = r - s$, dann können wir beim Bruche

$$\frac{A \cdot B}{10^{m+n}} = \frac{A \cdot 10^r}{10^{m+n}} = \frac{A \cdot 10^r}{10^{m+(r-s)}} = \frac{A \cdot 10^r}{10^{(m-s)+r}} = \frac{A \cdot 10^r}{10^{m-s} \cdot 10^r}$$

Zähler und Nenner durch 10^r kürzen und gelangen so zum Resultate:

$$\frac{A}{10^m} \cdot 10^s = \frac{A}{10^m} \cdot \frac{10^{n+s}}{10^n} = \frac{A \cdot 10^r}{10^{m-s+r}} = \frac{A}{10^{m-s}}.$$

Ist dagegen $\frac{B}{10^n} = \frac{10^r}{10^n}$ und $n = r + s$, also $\frac{B}{10^n} = \frac{10^r}{10^{r+s}} = \frac{1}{10^s}$, so folgt:

$$\frac{A}{10^m} \cdot \frac{B}{10^n} = \frac{A}{10^m} \cdot \frac{1}{10^s} = \frac{A}{10^{m+s}}.$$

In beiden Fällen bleibt also die durch die Zahl A dargestellte Ziffernfolge des Multiplikand dieselbe, und es ändert sich nur die Zahl der Dezimalstellen, beziehungsweise die Stellung des Dezimalpunktes. Bei der Multiplikation mit 10^s wird die Zahl der Dezimalstellen um s Stellen vermindert und bei der Division durch 10^s um s Stellen vermehrt.

Soll eine Dezimalzahl $\frac{A}{10^m}$ durch eine andere $\frac{B}{10^n}$ dividiert werden, so folgt aus $\frac{A}{10^m} : \frac{B}{10^n} = \frac{A}{10^m} \cdot \frac{10^n}{B} = \frac{A}{B} \cdot \frac{10^n}{10^m}$, daß die

Ziffernfolge des Quotienten nur von der Division $A:B$ abhängt, da der Faktor $\frac{10^n}{10^m}$ daran nichts ändert. Geht diese Division auf, so ergibt sich durch Multiplikation mit 10^n und durch Division mit 10^m der Stellenwert der einzelnen Ziffern des Quotienten. Wir können denselben aber auch schon für die erste Ziffer des Quotienten feststellen und dann die Division durchführen, ohne die eventuelle Teilbarkeit der Zahlen A und B zu berücksichtigen. Da das Produkt der beiden höchsten Stellen im Divisor und Quotient die erste oder die beiden ersten Stellen des Dividend geben muß, so finden wir den Stellenwert der ersten Ziffer im Quotienten durch folgende mechanische Regel:

Wir denken uns den Divisor so über den Dividend geschrieben, daß jene Ziffern übereinander stehen, deren Division die erste Ziffer des Quotienten gibt. Letztere hat dann denselben Stellenwert wie die unter der Einerstelle des Divisors stehende Stelle des Dividenden.

Nur in diesem Falle entspricht das Produkt aus der ersten Stelle im Quotienten und den Einern des Divisors dem gleichen Stellenwert des Dividenden.

Für 0·015364 : 0·7682 ist also die erste Ziffer des Quotienten

$$15:7=2, \text{ und zwar: } \begin{cases} 0·7682 \\ 0·015364 \\ 0·02\ldots\ldots, \text{ also } 0·015364:0·7682 = 0·02\ldots \end{cases}$$

Das Rechnen mit unvollständigen Zahlen.

Messen wir die Länge einer Strecke mit einem Maßstabe, der in *dm*, *cm* und *mm* eingeteilt ist, ohne die für Präzisionsmessungen nötigen Hilfsmittel anzuwenden, so können wir Zehntel von *mm* nicht mehr mit Sicherheit angeben und daher auch die auf *m* als Einheit bezogene Maßzahl nur auf drei Dezimalstellen genau bestimmen. Aber auch bei den genauesten Messungen gibt es für die Feststellung der aufeinander folgenden Ziffern eine Grenze, und zwar entweder wegen der beschränkten Genauigkeit der Meßinstrumente oder wegen der Unverläßlichkeit unserer Sinnesorgane. In diesem Sinne müssen alle durch Messung gewonnenen Zahlen als ungenau oder „unvollständig" gelten. Manchmal sind wir auch aus rein arithmetischen Gründen gezwungen, eine kleinere Anzahl von Dezimalstellen in Rechnung zu ziehen, als uns tatsächlich bekannt sind. In allen diesen Fällen müssen wir uns fragen: Wie hängt die

Genauigkeit eines Rechnungsresultates von der Genauigkeit der dabei verwendeten Zahlen ab?

Man unterscheidet eine absolute und eine relative Genauigkeit.

Die **absolute Genauigkeit** einer unvollständigen Zahl wird durch den Abstand der äußersten Grenzen bestimmt, zwischen welchen sich die vorhandenen Angaben bewegen. So kann z. B. eine viermalige Messung der Höhe einer Bergspitze über dem Meeresspiegel zu den Werten 3723 m, 3728 m, 3725 m und 3726 m führen, die einen Unterschied bis zu 5 m aufweisen; die absolute Genauigkeit dieser Bestimmung ist also 5 m.

Wenn wir dagegen die vollständige Zahl 38·762946 durch eine Zahl mit zwei Dezimalstellen ersetzen, so wissen wir, daß 38·76 um 0·002946 zu klein und 38·77 um 0·007054 zu groß ist. Während wir also bei Messungen nie in der Lage sind, irgend eine vollständige Zahl als die allein „richtige" Maßzahl zu bezeichnen, können wir in diesem Fall genau die Differenz zwischen dem richtigen Wert und der unvollständigen Zahl angeben, und diese nennen wir den **„Fehler"**. Man spricht aber auch dann von einer „Fehlergrenze", wo es überhaupt eine absolut richtige Maßzahl gar nicht gibt und die vorhandenen Angaben von einem gewählten Mittelwert höchstens um die halbe „Fehlergrenze" abweichen. Wenn eine bestimmte Fehlergrenze nicht ausdrücklich angegeben wird, so kann man eine Einheit der letzten Stelle als Fehlergrenze annehmen.

Unter der **„relativen Genauigkeit"** versteht man den Wert des Quotienten aus der unvollständigen Zahl und ihrer Fehlergrenze. Diese ist für die oben angeführte Höhenmessung $3725 : 5 = 745$ und beim zweiten Zahlenbeispiel $38{\cdot}76 : 0{\cdot}002946 = 13157$. Wenn wir im letzteren Fall den genauen Wert nicht kennen und daher 0·01 als Fehlergrenze annehmen, so ist die relative Genauigkeit $38{\cdot}76 : 0{\cdot}01 = 3876$. Unter dieser vielfach angenommenen Voraussetzung stellt die als ganze Zahl betrachtete Ziffernfolge das Maß für die relative Genauigkeit dar.

Um die absolute und relative Genauigkeit des Resultates einer mit unvollständigen Zahlen durchgeführten Rechnung zu beurteilen, betrachten wir jede unvollständige Zahl a' als die algebraische Summe einer vollständigen Zahl a und der halben Fehlergrenze d und setzen also $a' = a \pm d$. Ist nämlich die unvollständige Zahl aus einer anderen durch Streichung mehrerer Stellen hervorgegangen, so erhöht man die letzte beibehaltene Stelle um eine Einheit, wenn die erste weggelassene Ziffer 5 oder mehr als 5 ist, während im gegenteiligen Fall diese „Korrektur" unterbleibt. Die Differenz zwischen dem wahren und abgekürzten Wert ist dann immer kleiner als $^1/_2$

der letzten beibehaltenen Stelle. Da man aber im allgemeinen nicht weiß, ob der wahre Wert über oder unter dem gewählten Mittelwert liegt, beziehungsweise auch Werte in Betracht kommen, die um die halbe Fehlergrenze höher oder tiefer liegen, so ist die Fehlergrenze gleich $2\,d$, wenn d das Ergänzungsglied darstellt.

Es seien a' und b' zwei unvollständige Zahlen und $a' = a \pm d_1$ und $b' = b \pm d_2$. Dann ist $a' + b' = (a + b) \pm d$ und $a' - b' = (a - b) \pm d$, wobei $d = \pm(|d_1| + |d_2|)$. Summe und Differenz zweier unvollständiger Zahlen sind wieder unvollständige Zahlen, und die absolute Genauigkeit der Summe und Differenz ist die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Fehlergrenzen.

In beiden Fällen ist $d = \pm(|d_1| + |d_2|)$, weil sowohl in der Summe wie auch in der Differenz die Ergänzungsglieder gleiche Vorzeichen haben können. Daraus folgt die Regel:

Die absolute Genauigkeit einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe der absoluten Genauigkeitswerte der in ihr vorkommenden unvollständigen Zahlen.

Werden n unvollständige Zahlen zueinander addiert (beziehungsweise einige derselben subtrahiert), deren absolute Genauigkeit eine Einheit derselben Stelle beträgt, so entspricht die absolute Genauigkeit der Summe n Einheiten dieses Stellenwertes. Tatsächlich ist allerdings der Fehler meistens viel kleiner, weil sich die Fehler entgegengesetzten Vorzeichens gegenseitig aufheben, aber die Bestimmung der äußersten Fehlergrenze muß von zufälligen Eigenschaften unabhängig sein. Haben die Summanden Fehlergrenzen, die sehr verschiedenen Stellenwerten angehören, so richtet sich die absolute Genauigkeit der Summe in erster Linie nach der absoluten Genauigkeit jenes Summanden, dessen Fehlergrenze den höchsten Wert hat. Die absolute Genauigkeit der Summe 3·14159 ... + 83·24 ... + 0·71 ... ist demnach 0·02001. Es hat in diesem Fall keinen Sinn, mit dem Fehler 0·00001 zu rechnen, wenn der Fehler 0·02 betragen kann. In einem solchen Falle kürzt man alle Summanden bis auf dieselbe Stelle ab, weil die darüber hinausgehenden Stellen die Fehlergrenze nicht herabzudrücken vermögen und daher überflüssig sind. Die absolute Genauigkeit richtet sich also nach der größten Fehlergrenze. Dagegen kann die relative Genauigkeit der Summe größer sein als die eines bestimmten Summanden, denn im obigen Falle entspricht die relative Genauigkeit von 0·71 ... der Zahl 71 und die relative Genauigkeit der Summe 87·09 der Zahl 8709 : 2 = 4354.

Bilden wir das Produkt $a' \cdot b' = (a \pm d_1) \cdot (b \pm d_2) = a \cdot b \pm a \cdot d_2 \pm b \cdot d_1 \pm d_1 \cdot d_2 = a \cdot b + d$, so ersehen wir daraus, daß dieses wieder

eine unvollständige Zahl ist. Die halbe Fehlergrenze $d = a \cdot d_2 + b \cdot d_1 + d_1 \cdot d_2$ richtet sich hauptsächlich nach dem größten in dieser Summe enthaltenen Produkt. Die absolute Genauigkeit ist hier also $2d$ und mithin die relative Genauigkeit des Produktes $(a \cdot b):(2d)$, während die relative Genauigkeit der Faktoren den Quotienten $\frac{a}{d_1}$ und $\frac{b}{d_2}$ entspricht.

Ist $a:d_1$ die kleinere von diesen beiden Zahlen und daher a' die ungenauere Zahl, so folgt aus

$$\frac{ab}{d} = \frac{ab}{bd_1 + ad_2 + d_1 d_2}$$
$$= \frac{a}{d_1 + \frac{a}{b} d_2 + \frac{d_1 d_2}{b}} < \frac{a}{d_1}, \text{ weil } d_1 + \frac{a}{b} d_2 + \frac{d_1 d_2}{b} > d_1.$$

Die relative Genauigkeit des Produktes zweier unvollständiger Zahlen ist kleiner als die relative Genauigkeit des ungenaueren Faktors.

Sollen also zwei unvollständige Zahlen miteinander multipliziert werden, so empfiehlt sich, das abgekürzte Multiplikationsverfahren in der Weise anzuwenden, daß auch von der genaueren Zahl höchstens um eine Stelle mehr in Betracht gezogen wird, als von der ungenaueren.

Auch bei der Division zweier unvollständiger Zahlen hat es keinen Zweck, beim Quotient eine größere relative Genauigkeit anzustreben, als der Dividend oder der Divisor sie aufweisen, da ersterer als Produkt des Divisors und Quotienten nicht eine größere Genauigkeit bieten kann als diese beiden unvollständigen Zahlen.

Das Rechnen mit endlichen Grenzwerten.

Nachdem wir zuerst das Rechnen mit dekadischen ganzen Zahlen kennen gelernt haben, führten wir das Rechnen mit Dezimalbrüchen auf die dort aufgestellten Regeln zurück und mußten dieselben nur insoweit ergänzen, als bei Dezimalbrüchen auch die Stellung des Dezimalpunktes in Betracht kommt. Dabei haben wir stillschweigend die übrigens selbstverständliche Voraussetzung gemacht, daß die Zahl der Dezimalstellen eine „endliche" sei, weshalb wir dort vom Rechnen mit „endlichen" Dezimalbrüchen gesprochen haben. Wir nahmen ferner zuerst an, daß es sich dabei um „vollständige" Dezimalbrüche handelt, deren Wert also „eindeutig" ist, weil er aus den natürlichen Zahlen durch eindeutige

Rechnungen hervorgegangen ist. Es gibt aber auch Dezimalbrüche, die eine unbegrenzte Anzahl von Dezimalstellen besitzen, und diese wollen wir im Gegensatz zu jenen als „endlose" Dezimalbrüche bezeichnen. Wir nennen sie nicht „unendliche" Dezimalbrüche, weil der durch die unbegrenzte Reihenfolge von Ziffern dargestellte Zahlenwert keineswegs einer Größe entspricht, die man im mathematischen Sprachgebrauch als „unendlich" zu bezeichnen pflegt, obwohl man sich die Anzahl der Ziffern tatsächlich als „unendlich", nämlich größer vorstellen muß als jede noch so große Zahl. Um solche endlose Dezimalbrüche zu erhalten, brauchen wir nur irgend eine durch 9 nicht teilbare ganze Zahl durch 9 zu dividieren. So finden wir z. B. $7:9 = 0{\cdot}7777\ldots$ Sehen wir zunächst von der Möglichkeit ab, eine solche Zahl durch einen „unvollständigen" Dezimalbruch zu ersetzen, so fragt es sich, ob diese endlose Ziffernfolge überhaupt noch eine endliche Zahl darstellen kann, da sie doch die Summe einer unbegrenzten Zahl von Summanden bedeutet.

Daß der Dezimalbruch $0{\cdot}7777\ldots$ mit der unbegrenzten Anzahl von Ziffern 7 einen „endlichen" Wert besitzt, ergibt sich aus folgender Erwägung. Wir erhalten jedenfalls eine noch größere Zahl, wenn wir zu dieser Summe noch neue positive Summanden in beliebiger Zahl hinzufügen. Addieren wir also zu jeder Ziffer zwei Einheiten desselben Stellenwertes, so erhalten wir den ebenfalls „endlosen" Dezimalbruch $0{\cdot}9999\ldots$ Der „endliche" Dezimalbruch $0{\cdot}9$ ist kleiner als 1, und zwar um $0{\cdot}1$, der endliche Dezimalbruch $0{\cdot}99$ ist nur um $0{\cdot}01$ kleiner als 1, $0{\cdot}999$ um $0{\cdot}001$, $0{\cdot}9999$ um $0{\cdot}0001$ usw. Je mehr Ziffern dieser Zahl wir also heranziehen, desto weniger unterscheidet sich der entsprechende Dezimalbruch vom noch größeren Zahlenwerte 1, und wir können durch Verwendung einer entsprechenden Zahl von Stellen diesen Unterschied kleiner machen als eine beliebig kleine Zahl. Da alle diese Zahlen von der Form $0{\cdot}999\ldots$ kleiner sind als 1, also endlich sind, so muß auch der „endlose" Dezimalbruch „endlich" sein und kann sich mithin von 1 nicht mehr unterscheiden als eine beliebig kleine Zahl. Deshalb setzen wir ihn der Einheit „gleich".

Aus dem gleichen Grunde muß auch der „endlose" Dezimalbruch $0{\cdot}7777\ldots$ „endlich" sein, denn durch Addition unzähliger Summanden erhalten wir noch immer eine „endliche" Summe. Wenn wir der Reihe nach die Differenzen bilden:

$$\frac{7}{9} - 0{\cdot}7 = \frac{7}{9} - \frac{7}{10} = 7\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{7}{90},\ \frac{7}{9} - \frac{77}{100} = 7\left(\frac{1}{9} - \frac{11}{100}\right)$$
$$= \frac{7}{900},\ \frac{7}{9} - \frac{777}{1000} = \frac{7}{9000},\ldots$$

so ersehen wir daraus, daß dieselben immer kleiner und schließlich kleiner als eine beliebig kleine Zahl werden.

Kennen wir eine unbegrenzte Reihe aufeinanderfolgender Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ und eine Zahl g, oberhalb welcher der Index derselben liegen muß, damit irgend zwei von diesen Zahlen eine absolut genommen kleinere Differenz haben als eine beliebig kleine Zahl $\varepsilon > 0$, dann gibt es eine Zahl a, für welche $|a - a_n| < \varepsilon$, wenn $n > g$, und wir nennen dann a den Grenzwert der Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ und schreiben dafür: $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$.

Die Reihe der Zahlen $a_1 = 0{\cdot}7$, $a_2 = 0{\cdot}77$, $a_3 = 0{\cdot}777, \ldots$ hat diese Eigenschaft. Wählen wir $\varepsilon = 0{\cdot}0001$, dann ist $g = 4$, und z. B. $|a_8 - a_5| = 0{\cdot}00000777 < 0{\cdot}0001 = \varepsilon$. Da ferner, $(7:9) = a$ gesetzt, $|(7:9) - 0{\cdot}77777| = 0{\cdot}00000777\ldots = \frac{0{\cdot}777\ldots}{100000} = \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{100000} < \frac{1}{100000} < \varepsilon = \frac{1}{10000}$, so ist $7:9 = a$ der Grenzwert dieser Zahlenreihe.

Die Summe zweier Grenzwerte ist gleich dem Grenzwert der entsprechenden Summen.

Ist $|a - a_n| < \varepsilon_1$ und $|b - b_n| < \varepsilon_2$, so ist auch $|(a + b) - (a_n + b_n)| < \varepsilon$, wenn $n > g$. Weil $|(a + b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, so können wir n so wählen, daß $|a - a_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - b_n| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$; dann ist auch $|(a+b) - (a_n + b_n)| < \varepsilon$ und daher $a + b$ der Grenzwert von $a_n + b_n$.

Die Differenz zweier Grenzwerte ist gleich dem Grenzwert entsprechender Differenzen.

Aus $|a - a_n| < \varepsilon_1$ und $|b - b_n| < \varepsilon_2$ folgt $|(a - b) - (a_n - b_n)| < \varepsilon$, weil $|(a-b) - (a_n - b_n)| = |(a - a_n) - (b - b_n)| < |(a - a_n) + (b - b_n)| < \varepsilon$, wenn n so gewählt wird, daß $|a - a_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Das Produkt zweier Grenzwerte ist gleich dem Grenzwert der entsprechenden Produkte.

Aus $|a - a_n| < \varepsilon_1$ und $|b - b_n| < \varepsilon_2$ folgt $|ab - a_n b_n| < \varepsilon$; wenn nämlich $a < a_n + \varepsilon_1$ und $b < b_n + \varepsilon_2$, so ist $ab < (a_n + \varepsilon_1)(b_n + \varepsilon_2) = a_n b_n + a_n \varepsilon_2 + b_n \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$ und daher $ab - a_n b_n < a_n \varepsilon_2 + b_n \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Wählen wir also $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3(a_n + 1)} < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3(b_n + 1)} < \frac{\varepsilon}{3}$ also $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, $a_n \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ und $b_n \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, so ist $|ab - a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, falls n so groß gewählt wird, daß $|a - a_n| < \varepsilon_1$ und $|b - b_n| < \varepsilon_2$.

Der Quotient zweier Grenzwerte ist gleich dem Grenzwert der entsprechenden Quotienten, falls kein in Betracht kommender Divisor gleich Null ist.

Soll der Grenzwert im Dividend (a) das Produkt aus dem Grenzwert im Divisor (b) und dem Grenzwert der Quotientenreihe $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sein, so muß das Produkt $b \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{b}{b_n} \cdot a_n$ den Grenzwert a haben. Von diesen beiden Faktoren hat aber $\frac{b}{b_n}$ den Grenzwert 1 und a_n den Grenzwert a, also deren Produkt den Grenzwert $1 \cdot a = a$. Daß $\frac{b}{b_n}$ den Grenzwert 1 hat, folgt aus $\left|1 - \frac{b}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n}\right| < \frac{\varepsilon_1}{b_n} < \varepsilon$, wenn sich für jedes $\varepsilon_1 < \varepsilon b_n$ eine Zahl g finden läßt, daß $|b - b_n| = |b - b_n| < \varepsilon_1$, falls $n > g$.

Aus dem Satz über den Grenzwert eines Produktes ergeben sich die entsprechenden Folgerungen für die Grenzwerte von Produkten mehrerer Faktoren und für die Potenzen mit ganzzahligen Exponenten.

Die Verwandlung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche.

Jeder endliche Dezimalbruch stellt einen Quotienten dar, dessen Zähler die in Einern der niedersten Stelle ausgedrückte ganze Zahl und deren Nenner die n-te Potenz von 10 ist, wenn der Dezimalbruch n Stellen hat. Der in dieser Form angeschriebene Bruch läßt sich natürlich durch Abkürzen mit kleineren Zahlen darstellen, wenn der Zähler durch 2 oder 5 teilbar ist.

Die „endlosen" Dezimalbrüche lassen sich immer, aber nur dann durch gleichwertige gemeine Brüche ersetzen, wenn sie **„periodisch"** sind, d. h. wenn von einer bestimmten Stelle an eine gewisse Gruppe von Ziffern immer in derselben Reihenfolge wiederkehrt. Bei den **„reinperiodischen"** Dezimalbrüchen beginnt die für den Bruch charakteristische Zifferngruppe, die „Periode" sofort nach dem Dezimalpunkt, bei den **„gemischtperiodischen"** Dezimalbrüchen ist dieselbe vom Dezimalpunkt durch die „Vorperiode" getrennt.

Jeder „endlose" Dezimalbruch hat einen endlichen Grenzwert.

Ersetzen wir nämlich denselben durch eine endliche Anzahl seiner Dezimalstellen, so erhalten wir eine Reihe von Zahlen a_1, a_2, a_3, . . ., für welche $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ist, wenn $m > n > g$. Setzen

wir $\varepsilon = 1:10^r$, so genügt es, $g = r$ zu setzen, um diese Bedingung zu erfüllen. So ist z. B. für $g = r = 5$ der Betrag $\varepsilon = \frac{1}{10^5}$ und $|a_9 - a_6| < \frac{1}{10^5}$, weil $9 > 6 > 5$. Es läßt sich aber nicht für jeden endlosen Dezimalbruch eine rationale Zahl a als Grenzwert nachweisen. Zunächst können wir aber die Behauptung aufstellen:

Jeder periodische Dezimalbruch hat einen endlichen rationalen Grenzwert.

Es sei a' der Grenzwert eines reinperiodischen Dezimalbruches, p die Anzahl der Ziffern der Periode und a die aus der Ziffernreihe der Periode gebildete ganze Zahl. Wenn wir diese Zahl a zum Grenzwert a' des reinperiodischen Dezimalbruches hinzuzählen, so erhalten wir genau denselben Ausdruck wie durch die Multiplikation des Dezimalbruches mit 10^p. Daher ist die Summe $a + a' = 10^p \cdot a'$ und $a = a' \cdot (10^p - 1)$; mithin ist $a' = \frac{a}{10^p - 1}$ der Grenzwert dieses reinperiodischen Dezimalbruches. Für $a' = 0{\cdot}\dot{2}7\dot{1} = 0{\cdot}271271\ldots$ ist $p = 3$, $a = 271$ und $a + a' = 271{\cdot}\dot{2}7\dot{1} = 10^3 \cdot 0{\cdot}\dot{2}7\dot{1}$, also $a' = \frac{271}{1000 - 1} = \frac{271}{999}$.

Ist b' der Grenzwert eines gemischtperiodischen Dezimalbruches, dessen Periode p und dessen Vorperiode q Ziffern hat, so können wir den mit 10^{p+q} multiplizierten Grenzwert b' folgendermaßen in drei Summanden zerlegen. Bedeutet c eine ganze Zahl, deren Ziffernfolge dieselbe ist wie die der Vorperiode, und b eine ganze Zahl mit der Ziffernfolge der Periode, so ist $10^{p+q} \cdot b' = c \cdot 10^p + b + \frac{b}{10^p - 1}$, wobei $\frac{b}{10^p - 1}$ der Grenzwert eines reinperiodischen Dezimalbruches mit der Periode b ist. Daraus folgt $10^{p+q} \cdot b' = \frac{10^p}{10^p - 1}[c \cdot 10^p + b - c]$ und schließlich $b' = \frac{(c \cdot 10^p + b) - c}{(10^p - 1)\, 10^q}$.

Für $b' = 0{\cdot}72\dot{8}5\dot{1}$ ist $p = 3$, $q = 2$, $c = 72$ und $b = 851$, $10^{p+q} \cdot b' = 72851{\cdot}\dot{8}5\dot{1} = 72851 + \frac{851}{999} = 10^5 \cdot b'$ also $b' = \frac{72851 - 72}{999 \cdot 100} = \frac{72779}{99900}$.

In beiden Fällen nimmt also das Resultat die Form eines gemeinen Bruches an, der denselben Wert hat wie der endlose periodische Dezimalbruch. Dieser kann natürlich auf einfachere Form gebracht werden, wenn Zähler und Nenner einen gemeinsamen Teiler haben. Die „Verwandlung von periodischen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche“ ist demnach nichts anderes als das Berechnen

eines Grenzwertes. Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, daß jeder gemeine Bruch sich in einen Dezimalbruch verwandeln, d. h. sich in dieser Form darstellen läßt, und daß derselbe nur ein endlicher oder periodischer sein kann. Die Grenzwerte der nichtperiodischen endlosen Dezimalbrüche können daher nicht gebrochene Zahlen sein. Der erste, der sich mit der Berechnung der Grenzwerte periodischer Dezimalbrüche befaßt hat, war der Engländer Wallis (1693).

Die Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche.

Ein gemeiner Bruch läßt sich nur dann in einen „endlichen“ Dezimalbruch verwandeln, wenn der Nenner keine anderen Primfaktoren als 2 und 5 enthält.

Wenn das der Fall ist, so können wir den Zähler (a) und Nenner (b) mit einer solchen Potenz von 10 multiplizieren, daß sich die in ihr vorkommenden Faktoren 2 und 5 gegen diese Faktoren im Nenner b kürzen lassen. Im Nenner bleibt dann nur mehr eine Potenz von 10 zurück, und der Bruch geht damit in einen Dezimalbruch über. Ist $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n}$ und $10^n = c \cdot b$, so folgt hieraus $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot b \cdot c}{b \cdot 10^n} = \frac{a \cdot c}{10^n}$.

Hat der Nenner eines echten Bruches $\frac{a}{b}$ mit 10^n keinen Faktor gemein, so kann der mit 10 multiplizierte Zähler a nur $(b-1)$ verschiedene Reste ergeben, da die Reste 0 und b ausgeschlossen sind. Die Division des wieder mit 10 multiplizierten Restes kann abermals nur einer von den $b-1$ möglichen Resten sein. Nach höchstens $b-1$ Divisionen muß ein früherer Rest wiederkehren, und hierauf wiederholen sich auch alle darauffolgenden Reste in derselben Ordnung. Daher müssen dann die Ziffern des Quotienten ebenfalls periodisch wechseln.

Da die Reihenfolge der Ziffern im Quotienten nur vom Nenner b abhängt, so kann auch ein Vielfaches des Zählers dieselbe Reihenfolge der periodisch wiederkehrenden Ziffern ergeben. Wird also ein periodischer Dezimalbruch mit einer Zahl multipliziert, die gegen b relativ prim ist, so kann wohl die Periode mit einer andern Ziffer beginnen, aber die Reihenfolge der Ziffern bleibt dieselbe.

Hat der Nenner $b = m \cdot b'$ einen Faktor m, der nur die Prim-

faktoren 2 und 5 enthält, während dieselben im Faktor b' nicht vorkommen, so gehen der Periode so viele Stellen als Vorperiode voraus, als ein Bruch mit dem Nenner m Dezimalstellen hat. Die Vorperiode kann also nur eine endliche Anzahl von Ziffern umfassen. Aus $\frac{a}{b} = \frac{a}{m \cdot b'}$ folgt nämlich, daß wir $\frac{a}{b}$ als Summe oder Differenz zweier Brüche darstellen können; denn es ist

$$\frac{a}{m b'} = \frac{a_1}{m} \pm \frac{a_2}{b'} = \frac{a_1 \cdot b' \pm a_2 m}{m \cdot b'}.$$

Der gemeine Bruch $\frac{a_1}{m}$ gibt einen endlichen Dezimalbruch, dessen q Dezimalstellen, zu denen des reinperiodischen Dezimalbruches $\frac{a_2}{b'}$ addiert oder von denselben subtrahiert, die periodische Ziffernfolge an den ersten q Stellen zerstören und die Entstehung der q ziffrigen „Vorperiode" hervorrufen.

Irrationale Zahlen und Grenzwerte.

Bei der Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche haben wir gesehen, daß sich erstere entweder als endliche Dezimalbrüche darstellen lassen oder als Grenzwerte rein- oder gemischtperiodischer Dezimalbrüche erscheinen. Andererseits haben alle rein- und gemischtperiodischen Dezimalbrüche gemeine Brüche und mithin rationale Zahlen als Grenzwerte. Was bedeutet aber dann ein Dezimalbruch mit einer endlosen Reihe von Ziffern, die keine Periodizität aufweisen? Jeder solche Dezimalbruch muß aber, wie wir gesehen haben, ebenfalls einen eindeutig bestimmten Grenzwert besitzen, der aber weder eine ganze noch eine gebrochene, also überhaupt keine rationale Zahl sein kann. Wir bezeichnen deshalb solche Grenzwerte als **irrationale** Zahlen. Auch diese neue Art von Zahlen kann positiv und negativ sein, letzteres tritt ein, wenn wir einen irrationalen Grenzwert von einer absolut genommen kleineren ganzen Zahl subtrahieren. Das Gebiet der positiven und negativen ganzen, und das der positiven und negativen gebrochenen, also der rationalen Zahlen wird nunmehr noch um die positiven und negativen irrationalen Zahlen erweitert und bildet mit diesen das Gebiet der **reellen** Zahlen. Insofern die irrationalen Grenzwerte beliebig genau bestimmbar sind, bezeichnet man sie als „Zahlen".

Wir können aber nur in der Weise mit denselben rechnen, als wir die Grenzwerte mit Hilfe unvollständiger Zahlen darzustellen vermögen. Wir werden später Gelegenheit haben, das Vorhandensein solcher irrationaler Grenzwerte nicht nur nachzuweisen, sondern auch mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit zu berechnen. Ob ein Grenzwert rational oder irrational sei, läßt sich nicht immer in einfacher Weise nachweisen. Mit dem Beweis, daß die Zahl, mit der man die Maßzahl des Durchmessers multiplizieren muß, um den Umfang des Kreises zu erhalten, eine irrationale Zahl sei, befaßte sich in strenger Form zuerst J. H. Lambert (1766) in Berlin, Legendre (1794) in Paris, Lindemann (1882) in München und besonders Weierstraß (1885) in Berlin, und tatsächlich weist diese von Shanks im Jahre 1874 bis auf 707 Stellen berechnete Zahl in allen diesen Ziffern noch immer keine Periodizität auf.

Das Rechnen mit algebraischen Funktionen.

In dem früher verwendeten Ausdruck von der Form $z = a_4 g^4 + a_3 g^3 + a_2 g^2 + a_1 g + a_0$ haben wir g als die Grundzahl eines Zahlensystems aufgefaßt und a_4, a_3, a_2, a_1 und a_0 als die Ziffern der Zahl z. Letztere sind also ganze Zahlen, die zwischen 0 und $g - 1$ (mit Einschluß der Grenzen) liegen. Als Grundzahl g des Zahlensystems haben wir eine ganze Zahl $g > 1$ verwendet. Diese Einschränkung lassen wir nun fallen und bezeichnen mit x irgend eine der uns bisher bekannt gewordenen Zahlen, mögen dieselben positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational sein. Die mit den Potenzen von x multiplizierten Zahlen a_1, a_2, a_3 usw. nennen wir nach Vieta (1591) **Koeffizienten.** Wir stellen uns dieselben als bekannt vor, sie müssen aber auch nicht mehr innerhalb gewisser Grenzen liegen und können ebenfalls positive oder negative, ganze oder gebrochene und irrationale Zahlen bedeuten. Dann setzen wir $a_4 x^x + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = f(x)$ und bezeichnen das Ergebnis der in diesem Ausdruck angedeuteten Operationen nach Leibniz (1694) als eine „ganze Funktion". Das dafür allgemein gebräuchliche Zeichen $f(x)$ stammt vom Mathematiker Leonhard Euler (1734). Wir sagen, die Funktion sei vom „vierten Grade", wenn die höchste Potenz von x, die in demselben vorkommt, die vierte ist, und sie heißt eine „ganze" Funktion, weil sie keinen Nenner besitzt, in dem x vorkäme. Eine gebrochene Funktion hätte z. B. die Form: $f(x) = \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ und erscheint als Quotient

zweier ganzer Funktionen vom dritten und zweiten Grade. Alle Zahlen, zu welchen dieser Ausdruck führt, betrachten wir als Werte derselben Funktion, so lange die „konstanten“ Koeffizienten dieselben bleiben. Dagegen entspricht jedem Werte der als veränderlich angenommenen Größe im allgemeinen ein anderer Wert von $f(x)$, und deshalb nennt man x die „unabhängig Veränderliche“ und $f(x)$ eine von x „abhängige Funktion“. Die einzelnen Glieder von $f(x)$ pflegt man stets im gleichen Sinne, also immer nach steigenden oder nach fallenden Potenzen von x zu ordnen. „Algebraisch“ nennt man solche Funktionen, weil sie „algebraische Summen“, d. h. solche Summen sind, deren einzelne Glieder aus positiven oder negativen Zahlen bestehen, auch wenn sie durchwegs nur Summen positiver Zahlen zu sein scheinen.

Wie mit den allgemeinen, durch Buchstaben dargestellten Zahlen, so können wir auch mit diesen Funktionen rechnen, ohne ihren Zahlenwert zu kennen, d. h. wir vermögen eine Funktion anzugeben, deren Zahlenwert ebensogroß ist wie das Ergebnis, wenn wir dieselben Rechnungen, statt mit den Funktionen, mit ihren Zahlenwerten ausführen. In diesem Sinne sind die folgenden Regeln aufzufassen, deren Beweis sich unmittelbar aus den beifolgenden arithmetischen Darstellungen ergibt:

Die Summe oder Differenz zweier ganzer Funktionen von x ist wieder eine ganze Funktion von x, und deren Koeffizienten sind die Summen, beziehungsweise die Differenzen der Koeffizienten beider Funktionen.

Wenn $f_1(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ und $f_2(x) = b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, so ist „simultan“: $f_1(x) \pm f_2(x) = (a_3 \pm b_3) x^3 + (a_2 \pm b_2) x^2 + (a_1 \pm b_1) x + (a_0 \pm b_0)$, d. h. in dieser Formel gelten entweder überall das obere, oder überall das untere Operationszeichen.

Wenn im Resultat die Summe, beziehungsweise Differenz der Koeffizienten bei der höchsten Potenz von x nicht Null ist, so ist der Grad der Summe derselbe wie der beider Summanden, falls sie gleichen Grades sind; andernfalls stimmt der Grad der Summe oder Differenz mit dem Grade jener Funktion überein, welche den höheren Grad besitzt.

Das Produkt zweier ganzer Funktionen von x ist wieder eine ganze Funktion von x, und ihr Grad ist die Summe der Grade der Faktoren; ihre Koeffizienten erhält man, wenn man alle Glieder der einen Funktion mit allen Gliedern der andern multipliziert und die nach Potenzen von x geordneten Teilprodukte addiert.

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)(b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)$$
$$=a_3b_3x^6+(a_3b_2+a_2b_3)x^5+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)x^4$$
$$+(a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2+a_0b_3)x^3+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2$$
$$+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0.$$

Der Grad des Produktes ist gleich der Summe der Grade der Faktoren, weil der Exponent der höchsten Potenz von x im Produkt gleich der Summe der höchsten Potenzen von x ist, die in den Faktoren auftreten.

Soll das Resultat der Division zweier ganzer Funktionen wieder eine ganze Funktion oder wenigstens eine Konstante sein, so muß der Grad des Dividenden höher oder gleich dem des Divisors sein. Gibt es also eine ganze Funktion $f_3(x)$, für welche die Gleichung besteht: $f_1(x)=f_2(x)\cdot f_3(x)$, ist also z. B.

$$f_1(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(b_2x^2+b_1x+b_0)(c_1x+c_0),$$

so schreiben wir $f_1(x):f_2(x)=f_3(x)$ und finden $f_3(x)$, indem wir die Koeffizienten dieser Funktion aus denen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ berechnen. Der Grad des Quotienten muß dabei die Differenz der Gradwerte des Dividenden und Divisors darstellen.

Aus der Entwicklung des Produktes $(b_2x^2+b_1x+b_0)\cdot(c_1x+c_0)$ $=b_2c_1x^3+(b_2c_0+b_1c_1)x^2+(b_1c_0+b_0c_1)x+b_0c_0=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ergibt sich, daß wir das erste Glied des Quotienten c_1 erhalten, wenn wir das erste Glied des Dividenden a_3 durch das erste Glied des Divisors b_2 dividieren, denn es muß $a_3=b_2c_1$ und daher $c_1=a_3:b_1$.

$f_3(x)$ muß eine Funktion ersten Grades, also von der Form c_1x+r sein, weil das Produkt aus dieser und der Funktion zweiten Grades $f_2(x)$ eine Funktion dritten Grades geben soll. Aus $f_1(x)=f_2(x)\cdot(c_1x+r)$ folgt $f_1(x)=f_2(x)\cdot c_1x+f_2(x)\cdot r$ und $r=[f_1(x)-f_2(x)\cdot c_1x]:f_2(x)$. Wir erhalten demnach das auf c_1x folgende Glied r des Quotienten, indem wir vom Dividend $f_1(x)$ das Produkt des Divisors und des ersten Gliedes des Quotienten $c_1x=a_3x^3:b_2x^2$ subtrahieren. Dieses Verfahren zur Auffindung eines neuen Gliedes wiederholen wir so lange, bis das höchste Glied der Differenz von niedrigerem Grade ist, als das des Divisors. Daß behufs Ausführung einer solchen Division Dividend und Divisor nach Potenzen einer und derselben in beiden Ausdrücken vorkommenden allgemeinen Zahl z geordnet sein müssen, hat zuerst J. Newton in seinem Werke „Arithmetica universalis“ (1707) festgestellt.

Beim obigen Beispiele ergeben sich folgende Rechnungen:

$$f_1(x)-f_2(x)\cdot c_1x=(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)-(b_2x^2+b_1x+b_0)c_1x$$
$$=b_2c_1x^3+(b_2c_0+b_1c_1)x^2+(b_1c_0+b_0c_1)x+b_0c_0-(b_2c_1x^3+b_1c_1x^2+b_0c_1x)$$
$$=b_2c_0x^2+b_1c_0x+b_0c_0=f_2(x)\cdot r \text{ und } r=(b_2c_0x^2+b_1c_0x+b_0c_0):f_2(x).$$

Aus $(b_2 c_0 x^2 + b_1 c_0 x + b_0 c_0) = (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) \cdot r = b_2 r x^2 + b_1 r x + b_0 r$ folgt $b_2 c_0 = b_2 r$ und $r = c_0$.

Um also das nächste Glied im Quotienten zweier ganzen Funktionen zu finden, brauchen wir auch hier nur das höchste Glied des Divisionsrestes durch das höchste Glied des Divisors zu dividieren. So fahren wir fort, bis sich die Differenz Null einstellt oder ein Rest, dessen höchstes Glied von niedrigerem Grade ist als der Divisor. Im ersteren Falle sagen wir $f_1(x)$ sei durch $f_2(x)$ **teilbar.** Eine ganze Funktion $f(x)$, die durch keine Funktion niedrigeren Grades teilbar ist, und somit ein Analogon zur Primzahl bildet, nennt man **„irreduzibel"**, d. h. sie läßt sich nicht auf ein Produkt ganzer Funktionen niedrigeren Grades zurückführen. Ausdrücke, welche die Veränderliche x nicht enthalten, werden nicht als „Teiler" aufgefaßt.

Die ganzen Funktionen ersten Grades, welche die „Veränderliche" x nur in der ersten Potenz enthalten, nennt man „linear", die zweiten Grades „quadratisch", die vom dritten Grade auch „kubisch".

Bei der Division einer ganzen Funktion durch eine lineare Funktion von der Form $x - b$ kann man das Verfahren von Horner anwenden, bei dem man zur Berechnung des Quotienten nicht den ganzen Dividend und Divisor, sondern nur deren Koeffizienten ververwendet. Soll z. B. $f_1(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ durch $f_2(x) = x - b$ dividiert werden, so ist der erste Koeffizient des Quotienten $a_3 : 1 = a_3$. Den nächsten Koeffizient erhalten wir, wenn wir den ersten Koeffizient von $f_1(x) - f_2(x) \cdot a_3 x^2 = (a_2 + b a_3) x^2 + a_1 x + a_0$ durch den ersten Koeffizienten von $x - b$, also durch 1 dividieren. Er ist demnach $a_2 + b a_3$. Nach der **Hornerschen Methode** finden wir die Koeffizienten des Quotient, indem wir zu jedem folgenden Koeffizient des Dividenden das Produkt aus dem früher berechneten Koeffizient des Quotienten und dem Subtrahend des Divisors addieren.

Daher ist $(5x^4 - 22x^3 + 18x^2 + 13x - 12) : (x - 3) = 5x^3 - 7x^2 - 3x + 4$, denn $5 : 1 = 5$, $-22 + 3 \cdot 5 = -7$, $+18 + 3(-7) = -3$, $+13 + 3(-3) = 4$ und $-12 + 3 \cdot 4 = 0$, also ist $x - 3$ ein Teiler des Dividenden, weil kein Rest geblieben ist.

Auf diesem Wege läßt sich die „Reduzierbarkeit" folgender Ausdrücke nachweisen: Es ist: $(x^5 - 1) : (x - 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, denn $1 : 1 = 1$, $0 + (+1) \cdot 1 = 1{,}0 + (+1) \cdot 1 = 1{,}0 + (+1) \cdot 1 = 1$ und schließlich $-1 + (+1) \cdot 1 = -1 + 1 = 0$. Mithin ist jeder Ausdruck von der Form $x^n - 1$ durch $x - 1$ teilbar. $(x^5 + 1) : (x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, denn $1 : 1 = 1{,}0 + (-1) \cdot 1 = -1{,}0 + (-1) \cdot (-1) = +1{,}0 + (-1) \cdot 1 = -1{,}0 + (-1) \cdot (-1) = 1$ und $1 + (-1) \cdot 1 = 0$. Durch $x + 1$ ist also ein Ausdruck von der

Form x^n+1 nur dann teilbar, wenn n ungerade ist, denn nur in diesem Falle ist die letzte Differenz Null.

$(x^4-1):(x+1)=x^3-x^2+x-1$, denn $1:1=1{,}0+(-1)\cdot 1$ $=-1{,}0+(-1)\cdot(-1)=+1{,}0+(-1)\cdot 1=-1$, $-1+(-1)\cdot(-1)=0$.

Dagegen ist ein Ausdruck von der Form x^n-1 durch $x+1$ nur dann teibar, wenn n gerade ist. In den beiden letzten Fällen hat der Quotient Zeichenwechsel, im ersten Falle Zeichenfolge.

Da alle Koeffizienten in diesen Beispielen gleich 1 sein müssen, so können diese Divisionen nur dann aufgehen, wenn das letzte Glied im Quotient auch dem Vorzeichen nach der Quotient der beiden letzten Glieder von Dividend und Divisor ist. Ist also in $x^n\pm 1$ n **gerade**, so ist das letzte Glied im Quotient -1 wegen des Zeichenwechsels und nur $-1:+1$ gibt -1, also ist auch nur x^n-1 teilbar. Ist n **ungerade**, so ist das letzte Glied des Quotienten $+1$, und nur $+1:+1=+1$, also kann dann nur x^n+1 durch $x+1$ teilbar sein. x^n-1 ist durch $x-1$ immer teilbar, ob n gerade oder ungerade ist, weil das letzte Glied wegen der Zeichenfolge $+1=(-1):(-1)$.

Die Zerlegung einer ganzen Funktion in das Produkt zweier oder mehrerer ganzer Funktionen derselben Veränderlichen wird allgemein mit Hilfe der Gleichungen ausgeführt und gehört in das Gebiet der „Algebra". Den größten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Funktionen derselben Veränderlichen, falls ein solcher existiert, findet man durch ein ähnliches Verfahren wie bei der **Kettendivision**, bei der es sich darum handelt, das größte gemeinsame Maß zweier ganzer Zahlen zu finden. Wir dividieren demnach die Funktion höheren Grades durch die niedrigen Grades. Ist letztere in ersterer ohne Rest enthalten, so ist sie selbst ein Teiler derselben und daher auch der größte gemeinsame Teiler beider Funktionen. Der andernfalls auftretende Rest muß von niedrigerem Grade sein als der Divisor. Wenn wir hierauf diesen durch den Rest dividieren, so erhalten wir entweder den Rest Null oder einen von Null verschiedenen Rest. Im ersteren Falle ist der erste Rest nicht nur der größte Teiler des früheren Divisors, sondern auch des Dividenden, also beider Funktionen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens sinkt der Grad der Funktionen bei jeder Division mindestens um eine Einheit. Haben die Funktionen keinen Teiler gemein, so gelangen wir einmal zu einer Funktion vom Grade Null, d. h. zu einer Funktion, die x nicht mehr enthält, also eine „Konstante" ist. Falls sich früher ein Rest Null einstellt, so ist der letzte davon verschiedene Rest der größte gemeinsame Teiler beider Funktionen.

Die Veränderlichkeit der Funktionen.

Wir haben die Zahl x, deren Betrag den Wert einer Funktion $f(x)$ bestimmt, als die „unabhängig Veränderliche" bezeichnet, weil damit der Gegensatz zu dem von ihr „abhängigen veränderlichen" Werte der Funktion hervorgehoben wird. Um das Verhalten der Funktion kennen zu lernen, untersuchen wir ihre Werte in der „Umgebung" eines bestimmten Wertes x_0 von x, d. h. für alle Werte von x, die zwischen $x_0 - d$ und $x_0 + d$ liegen.

Wenn sich der Wert von $f(x)$ für alle dem „Intervall" zwischen $x_0 - d$ und $x_0 + d$ angehörigen x-Werte nicht ändert, so sagen wir $f(x)$ sei in der Umgebung von x_0 unveränderlich oder konstant.

Ist $x_0 - d < x_2 < x_1 < x_0 + d$ und $f(x_2) < f(x_1)$, so bezeichnen wir die Funktion $f(x)$ als in der Umgebung von x_0 zunehmend und als abnehmend, wenn $f(x_2) > f(x_1)$.

Wenn sowohl $f(x_0 + d) < f(x_0)$ als auch $f(x_0 - d) < f(x_0)$, so hat die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ein Maximum, d. h. sie erreicht für x_0 in dieser Umgebung ihren größten Wert, und sie hat hier ein Minimum, oder sie erreicht für x_0 in dieser Umgebung ihren niedrigsten Wert, wenn sowohl $f(x_0 + d) > f(x_0)$ als auch $f(x_0 - d) > f(x_0)$.

Wir beschränken uns in der Lösung dieser Frage auf Funktionen von der Form: $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ und untersuchen die Differenz

$$\begin{aligned}
f(x+d) - f(x) &= a_3 (x+d)^3 + a_2 (x+d)^2 + a_1 (x+d) + a_0 \\
&\quad - (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\
&= a_3 (x^3 + 3 x^2 d + 3 x d^2 + d^3) + a_2 (x^2 + 2 d x + d^2) \\
&\quad + a_1 (x+d) + a_0 - (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\
&= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) \\
&\quad + d(3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1) + d^2 (3 a_3 x + a_2) + a_3 d^3 \\
&= d(3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1) + d^2 (3 a_3 x + a_2) + a_3 d^3 \\
&= d[3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1 + d(3 a_3 x + a_2) + d^2 a_3].
\end{aligned}$$

Rechnen wir uns diesen Ausdruck für einen ganz bestimmten Wert von x_0 und d ziffernmäßig aus, so entscheidet das Vorzeichen des Resultates, welcher von den oben angeführten Fällen zutrifft. Dabei ist allerdings zu beachten, ob sich das Vorzeichen dieser Differenz nicht ändert, wenn wir für d irgend einen absolut genommen kleineren Wert einsetzen.

Eine andere für das Verhalten der Funktion $f(x)$ wichtige Eigenschaft ist die folgende:

Wenn die Differenz $f(x_0+d)-f(x_0)$ kleiner wird als jede beliebige noch so kleine Zahl ε, falls auch d beliebig klein gewählt wird, so ist die Funktion an dieser Stelle stetig.

Dies trifft bei der Funktion $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ für alle endlichen Werte von x wirklich zu. Da wir uns auf solche Werte von d beschränken können, die kleiner als 1 sind, so ist der Ausdruck $3a_3x^2+2a_2x+a_1+d(3a_3x+a_2)+d^2a_3<|3a_3x^2|+|2a_2x|+|a_1|+|3a_3x|+|a_2|+|a_3|=N$, wobei wir alle Produkte durch ihre absoluten Werte und d durch den Wert 1 ersetzt, also mindestens drei Summanden vergrößert, möglicherweise auch einige negative Summanden in positive verwandelt haben. Es ist daher $f(x_0+d)-f(x_0)<d\cdot N<\varepsilon$ mithin kleiner als eine beliebig kleine Zahl ε, wenn wir $d<\frac{\varepsilon}{N}$ wählen. Dies drückt man mit dem Zeichen aus: $\lim\limits_{d=0} f(x_0+d)=f(x_0)$, oder in Worten: $f(x_0+d)$ **konvergiert** für $d=0$ gegen $f(x_0)$ oder $f(x_0)$ ist der **Grenzwert** (Limes) von $f(x)$ für $x=x_0$.

Ein weiterer Schritt in der Untersuchung des Verhaltens einer Funktion in einem bestimmten Intervall der unabhängigen Veränderlichen besteht darin, daß man das Verhältnis der Änderung der Funktion zur Änderung der unabhängigen Veränderlichen x berechnet. Wie wir die Geschwindigkeit einer Bewegung messen, indem wir das Verhältnis des zurückgelegten Weges zu der dazu verwendeten Zeit bestimmen, und somit dieselbe auf die Zeiteinheit beziehen, auch wenn wir nur einen kleinen Bruchteil einer Sekunde in Rechnung ziehen, so bilden wir auch hier den Quotient der Funktionsveränderung, gebrochen durch die Differenz d zweier Werte von x und berechnen den Grenzwert des Quotienten beider Differenzen. Man nennt ihn daher **Differentialquotient.**

Der Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 ist der Grenzwert

$$f'(x)\Big|_{x_0}=\frac{d\,f(x)}{d\,x}\Big|_{x_0}=\lim_{d=0}\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}.$$

Bilden wir für die oben angegebene Funktion den Quotient:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}&=3a_3x^2+2a_2x+a_1+d(3a_3x+a_2)+d^2a_3\\&=3a_3x^2+2a_2x+a_1+d(3a_3x+a_2+da_3),\end{aligned}$$

so bemerken wir, daß nur das Produkt mit dem Faktor d vom Werte dieser Zahl d abhängt und daher die Differenz

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}-(3a_3x^2+2a_2x+a_1)=d(3a_3x+a_2+da_3)<\varepsilon,$$

wenn $d < \frac{\varepsilon}{M} < 1$ und $M = |3a_3 x| + |a_2| + |a_3|$, weil jedenfalls $3a_3 x + a_2 + d a_3 < |3a_3 x| + |a_2| + |a_3| = M$. Es ist somit für $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\lim_{d=0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} = \frac{d f(x)}{d x} = f'(x) = 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1.$$

Das Differenzieren.

Um den Differentialquotient einer Funktion von der Form $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ zu finden, ersetzen wir x durch $x + d$ und ordnen den sich ergebenden Ausdruck, wie es im vorhergehenden Abschnitt geschehen ist, nach steigenden Potenzen von d. Dann ist der Koeffizient der ersten Potenz von d der gesuchte Differentialquotient der Funktion $f(x)$, und man bezeichnet ihn auch kurz mit $f'(x)$. $f'(x)$ ist hier wieder eine Funktion von x, die für jeden Wert von x den Wert des Differentialquotienten von $f(x)$ annimmt, und es ist z. B. $f'(x_1) = 3a_3 x_1^2 + 2a_2 x_1 + a_1$ der Wert des Differentialquotienten von $f(x_1)$ und $f'(x_2) = 3a_3 x_2^2 + 2a_2 x_2 + a_1$ für $f(x_2)$.

Betrachten wir zunächst den speziellen Fall, daß $f(x)$ in der Umgebung von x_0 konstant sei und für beliebig kleine Werte von d immer $f(x_0 \pm d) = f(x_0) = c$; dann ist auch für alle diese Werte von d die Differenz $f(x_0 \pm d) - f(x_0) = 0$. Es ist deshalb für alle von 0 verschiedenen Werte von d stets $\frac{f(x_0 \pm d) - f(x_0)}{d} = \frac{0}{d} = 0$, somit hat auch der Grenzwert denselben Wert 0. Daraus folgt der Satz:

Wenn eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung eines Wertes x_0 konstant ist, so ist hier ihr Differentialquotient gleich Null.

Der für $d = 0$ sich ergebende unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ kommt für die Berechnung des Differentialquotienten nicht in Betracht, weil jeder Grenzwert nur aus den Funktionswerten in der nächsten Umgebung von x_0 und nicht aus dem Funktionswerte für x_0 selbst abgeleitet wird.

Betrachtet man die unabhängig Veränderliche x als eine Funktion ihres eigenen Wertes, so ist deren Differentialquotient gleich 1.

Aus $f(x) = x$ folgt $f(x+d) - f(x) = (x+d) - x = d$ und daraus $\frac{f(x+d) - f(x)}{d} = \frac{d}{d} = 1$. Weil dieser Quotient für alle Werte von d immer gleich 1 ist, so ist auch der Grenzwert dieses Quotienten gleich 1.

Wenn $\frac{d f(x)}{d x} = f'(x)$, d. h. wenn $f'(x)$ die differenzierte Funktion $f(x)$ darstellt, und a eine Konstante bedeutet, so ist der Differentialquotient von $a \cdot f(x)$ gleich $a \cdot f'(x)$.

Ist der Grenzwert $\operatorname*{Lim}_{d=0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} = f'(x)$, so ist

$$\operatorname{Lim} \frac{a \cdot f(x+d) - a f(x)}{d} = \operatorname*{Lim}_{d=0} \frac{a[f(x+d) - f(x)]}{d}$$
$$= a \cdot \operatorname*{Lim}_{d=0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} = a \cdot f'(x).$$

Aus diesen beiden Sätzen folgt $\frac{d(a x)}{d x} = a$, denn für $f(x) = x$ ist $f'(x) = 1$ und somit unter dieser Voraussetzung $\frac{d(a x)}{d x} = a \cdot \frac{d x}{d x} = a \cdot 1$.

Der Differentialquotient einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe ihrer Differentialquotienten. Wenn $\frac{d f_1(x)}{d x} = f_1'(x)$ und $\frac{d f_2(x)}{d x} = f_2'(x)$, so ist $\frac{d[f_1(x) + f_2(x)]}{d x} = f_1'(x) + f_2'(x)$.

Dies ergibt sich aus der Gleichheit der Ausdrücke

$$\frac{[f_1(x+d) + f_2(x+d)] - [f_1(x) + f_2(x)]}{d}$$
$$= \frac{[f_1(x+d) - f_1(x)] + [f_2(x+d) - f_2(x)]}{d}$$
$$= \frac{f_1(x+d) - f_1(x)}{d} + \frac{f_2(x+d) - f_2(x)}{d},$$

welche daher auch für deren Grenzwerte bestehen bleibt.

Der Differentialquotient von $f(x) = a x + b$ ist daher a, weil $\frac{d(a x)}{d x} = a$ und $\frac{d(a)}{d z} = 0$.

Wenn $\frac{d f_1(x)}{d x} = f_1'(x)$ und $\frac{d f_2(x)}{d x} = f_2'(x)$, so ist

$$\frac{d[f_1(x) \cdot f_2(x)]}{d x} = f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_1'(x) \cdot f_2(x)$$

$$\frac{d[f_1(x) \cdot f_2(x)]}{d x} = \operatorname*{Lim}_{d=0} \frac{f_1(x+d) \cdot f_2(x+d) - f_1(x) \cdot f_2(x)}{d}$$
$$= \operatorname*{Lim}_{d=0} \frac{f_1(x+d) \cdot f_2(x+d) - f_1(x+d) f_2(x) + f_1(x+d) f_2(x) - f_1(x) f_2(x)}{d}$$
$$= \operatorname*{Lim}_{d=0} \left[f_1(x+d) \cdot \frac{f_2(x+d) - f_2(x)}{d}\right] + \operatorname*{Lim}_{d=0} \left[\frac{f_1(x+d) - f_1(x)}{d} \cdot f_2(x)\right]$$
$$= f_1(x) \cdot f_2'(x) + f_1'(x) f_2(x),$$

denn wir haben schon an früherer Stelle gezeigt, daß die Summen und Produkte von Grenzwerten dem Grenzwert der Summen und Produkte gleich sind. Es ist ferner $\lim\limits_{d=0} f_1(x+d) = f_1(x)$, weil sonst der Zähler des Differentialquotienten nicht gleichzeitig mit dem Nenner gegen Null konvergieren könnte. Aus diesem Satze ergibt sich noch die wichtige Folgerung, für die Differenzierung von Potenzen mit ganzzahligen Exponenten: $\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d(x \cdot x)}{dx}$ $= x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x$, $\frac{d(x^3)}{dx} = \frac{d(x^2 \cdot x)}{dx} = x^2 \cdot 1 + 2x \cdot x = 3x^2$, $\frac{d(x^4)}{dx}$ $= \frac{d(x^3 \cdot x)}{dx} = x^3 \cdot 1 + 3x^2 \cdot x = 4x^3$ usw.

Gilt aber für $n = 3$ die Formel $\frac{d(x^n)}{dx} = n x^{n-1}$, so folgt aus

$$\frac{d(x^{n+1})}{dx} = \frac{d(x^n \cdot x)}{dx} = x^n \cdot 1 + n \cdot x^{n-1} \cdot x = (n+1) x^n$$

die allgemeine Gültigkeit der Regel $\frac{d(x^n)}{dz} = n x^{n-1}$. Es ist daher $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$, $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$, $\frac{d(x)}{dx} = 1$ und $\frac{d(a_0)}{dx} = 0$, $\frac{d(a_3 x^3)}{dx} = 3 a_3 x^2$, $\frac{d(a_2 x^2)}{dx} = 2 a_2 x$ und schließlich $\frac{d(a_1 x)}{dx} = a_1$, mithin

$$\frac{d(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)}{dx} = 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1 = f'(x),$$

wenn $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Wenn die unabhängig Veränderliche x und d zunehmen, so nimmt auch die Funktion $y = f(x)$ einen andern Wert an und wir wollen die entsprechende Zu- oder Abnahme von y mit h bezeichnen. Wenn demnach $y + h = f(x + d)$, so wird auch h gleichzeitig mit d gegen Null konvergieren, weil sonst $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{d=0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d}$ nicht einen endlichen Grenzwert annehmen könnte, wie wir es voraussetzen wollen. Dem Werte $y + h = f(x+d)$ entspreche aber in der Funktion $F(y)$ der Wert $F(y+h)$ und es sei $F'(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ $= \lim\limits_{h=0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h}$, wobei $h = f(x+d) - f(x)$ gleichzeitig mit $F(y+h) - F(y)$ gegen Null konvergiert. $F(y)$ ist also unmittelbar eine Funktion von y, mittelbar aber auch eine solche von x. Daher können wir auch den Differentialquotient von $F(y)$ nach x aus

$F'(y)$ und $y' = f'(x)$ berechnen, indem wir folgende Grenzwerte bilden und finden:

$$\lim_{d=0} \frac{F(y+h) - F(y)}{d} = \lim_{d=0} \left[\frac{F(y+h) - F(y)}{f(x+d) - f(x)} \cdot \frac{f(x+d) - f(x)}{d}\right]$$
$$= \lim_{h=0} \frac{F(y+h) - F(h)}{h} \cdot \lim_{d=0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} = \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$
$$= F'(y) \cdot f'(x).$$

Es besteht daher der Satz:

„Wenn der Wert y, von dem eine Funktion $F(y)$ abhängig ist, selbst wieder eine Funktion einer unabhängigen Veränderlichen, also $y = f(x)$ ist, dann hat auch die auf die unabhängige Veränderliche x bezogene Funktion $F(y)$ einen Differentialquotient $\frac{dF(y)}{dx}$, und dieser ist gleich dem Produkte aus dem Differentialquotient der ersten Funktion $F(y)$ bezüglich ihrer Veränderlichen y, also $\frac{dF(y)}{dy}$ und dem Differentialquotient der zweiten Funktion bezüglich der unabhängigen Veränderlichen x, also $\frac{df(x)}{dx}$“. Es ist somit $\frac{dF(y)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{df(x)}{dx} = F'(y) \cdot f'(x)$.

Wir können diesen Satz benützen, um den Differentialquotient des reziproken Wertes einer Funktion $f(x)$ zu bestimmen, da wir ja den reziproken Wert von $y = f(x)$ als eine Funktion $F(y)$ auffassen dürfen. $F(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{f(x)}$.

Es ist dann $\frac{dF(y)}{dy} = \lim\limits_{h=0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim\limits_{h=0} \frac{\frac{1}{y+h} - \frac{1}{y}}{h}$

$$= \lim_{h=0} \frac{y - (y+h)}{h \cdot (y+h)\, y} = -\lim_{h=0} \frac{h}{h \cdot y \cdot (y+h)} = -\lim_{h=0} \frac{1}{y\,(y+h)} = -\frac{1}{y^2},$$

und daher $\frac{d(Fy)}{dx} = -\frac{1}{y^2} \cdot f'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ und speziell für $f(x) = x$ und $F(y) = \frac{1}{x}$ ist $\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, weil $f'(x) = 1$.

Um die Differenzierung einer Funktion allgemein darstellen zu können, müssen wir noch folgende Aufgabe behandeln, welche die früheren Differenzierungsformeln gewissermaßen umfaßt. Wir nehmen deshalb zunächst an, die Funktion $U = F(y_1, y_2)$ hänge von zwei Veränderlichen y_1 und y_2 ab, die aber selbst wieder Funktionen

der unabhängigen Veränderlichen x seien und untersuchen den Grenzwert, dem sich der Quotient $\frac{D}{d}$ nähert, wenn d gegen Null konvergiert, falls D die Veränderung von U ist, welche der Veränderung von x um d entspricht.

Obgleich $U = F(y_1, y_2)$ von zwei Veränderlichen abhängt, können wir doch eine derselben einstweilen außer acht lassen und den auf die andere bezüglichen Differentialquotient berechnen. Man bezeichnet in diesem Falle den auf eine einzige von mehreren Veränderlichen bezogenen Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial y_1} = \frac{\partial F(y_1, y_2)}{\partial y_1}$ als den **partiellen Differentialquotient nach y_1** und $\frac{\partial U}{\partial y_2} = \frac{\partial F(y_1, y_2)}{\partial y_2}$ als den partiellen Differentialquotient nach y_2. Diese Differentialquotienten werden zum Unterschied von den übrigen mit rundem ∂ angeschrieben. Es sei ferner $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, und diese beiden Funktionen sollen die Differentialquotienten $\frac{d y_1}{d x} = f_1'(x)$ und $\frac{d y_2}{d x} = f_2'(x)$ besitzen, während sie für $x + d$ die Werte $y_1 + d_1 = f_1(x + d)$ und $y_2 + d_2 = f_2(x + d)$ annehmen und $U + D = F(y_1 + d_1, y_2 + d_2)$ gesetzt wird.

Wir bilden den Quotient, dessen Grenzwert berechnet werden soll, und gehen zu diesem Zwecke von der Gleichung aus

$$\frac{D}{d} = \frac{F(y_1 + d_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2)}{d}$$

$$= \frac{F(y_1 + d_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2 + d_2) + F(y_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2)}{d}$$

$$= \frac{F(y_1 + d_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2 + d_2)}{d} + \frac{F(y_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2)}{d}$$

$$= \frac{F(y_1 + d_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2 + d_2)}{d_1} \cdot \frac{d_1}{d} + \frac{F(y_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2)}{d_2} \cdot \frac{d_2}{d_1}.$$

Bilden wir hier den Grenzwert für $d = 0$, so geht $\frac{d_1}{d}$ in $f_1'(x)$, $\frac{d_2}{d}$ in $f_2'(x)$, $\frac{F(y_1 + d_1, y_2 + d_2) - F(y_1, y_2 + d_2)}{d_1}$ in $\frac{\partial F(y_1, y_2 + d_2)}{\partial y_1}$ über, und weil zugleich mit $d = 0$ auch $d_2 = 0$ wird, so ist

$$\lim_{d=0} \frac{\partial F(y_1, y_2 + d_2)}{\partial y_1} = \frac{\partial F(y_1, y_2)}{\partial y_1} \quad \text{und}$$

$$\lim_{d=0} \frac{D}{d} = \lim_{d=0} \frac{F(y_1 + d_1, y_2 + d_2) - F(y_1 y_2)}{d} = \frac{d U}{d x} = \frac{d F(y_1, y_2)}{d x}$$

$$=\frac{\partial F(y_1, y_2)}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial F(y_1, y_2)}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}=\frac{\partial U}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial U}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}.$$

Dies ist demnach der vollständige Differentialquotient von U nach x.

Der erste Teil dieser Summe stellt den Differentialquotient einer zusammengesetzten Funktion dar, bei welcher U zunächst als Funktion von y_1 und y_1 als Funktion von x erscheint, im zweiten Summand wird U als eine Funktion von y_2 und y_2 als Funktion von x aufgefaßt. Wenn also U als Funktion zweier Veränderlichen y_1 und y_2 dargestellt erscheint, so muß man nach jeder derselben den partiellen Differentialquotient bilden und diesen mit dem Differentialquotient derselben Veränderlichen nach x multiplizieren, um beide Summanden des vollständigen Differentialquotienten einer zusammengesetzten Funktion zu erhalten, in der x wiederholt als Ausgangspunkt verschiedener Rechnungsoperationen auftritt.

Dieser Satz enthält zugleich die Differenzierungsformel für die Summe mehrerer Funktionen, denn wenn $U=F(y_1, y_2)=f_1(x)+f_2(x)$ $=y_1+y_2$, so ist zunächst $\frac{\partial U}{\partial y_1}=1$ und $\frac{\partial U}{\partial y_2}=1$ und daher $\frac{dU}{dx}$ $=\frac{\partial U}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial U}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}=f'_1(x)+f'_2(x)$.

Damit stimmt auch die Ableitung des Differentialquotienten eines Produktes zweier Funktionen $P=f_1(x)\cdot f_2(x)=y_1\cdot y_2$ überein, derzufolge $\frac{dP}{dx}=f_2(x)\cdot f'_1(x)+f_1(x)\cdot f'_2(x)$, weil $\frac{\partial P}{\partial y_1}=y_2$ und $\frac{\partial P}{\partial y_2}$ $=y_1$ und somit $\frac{dP}{dx}=\frac{\partial P}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial P}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx}=y_2\cdot\frac{dy_1}{dx}+y_1\cdot\frac{dy_2}{dx}$.

Anwendungen der Differentialrechnung.

Durch Berechnung der Differentialquotienten lassen sich Aufgaben der folgenden Art sehr einfach lösen. Der Quotient zweier Funktionen $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ergebe für einen bestimmten Wert der unabhängig Veränderlichen x_0 einen Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$, wie es z. B. der Fall ist, wenn wir in $\frac{x^3+x^2-17x+15}{x^3-3x^2-4x+12}$ für x den Wert 3 einsetzen, denn wir erhalten dann $\frac{27+9-51+15}{27-27-12+12}=\frac{0}{0}$, mithin einen Ausdruck, der jeden beliebigen endlichen Wert darstellen

kann, da jede endliche Zahl mit dem Nenner 0 multipliziert den Zähler 0 gibt. Wenn wir aber überlegen, daß für einen anderen Wert von x, nämlich $x_0 + d$ weder Zähler noch Nenner gleich Null ist und daher auch für beliebig kleine Beträge von d der Quotient $\frac{f_1(x_0+d)}{f_2(x_0+d)}$ einen ganz bestimmten Wert darstellen muß, so kann auch der Grenzwert dieses Quotienten für $d=0$, also $\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}$ nicht jeden beliebigen Wert haben. Diesen Grenzwert können wir aber auf folgendem Wege berechnen. Da $f_1(x_0)=0$ und $f_2(x_0)=0$, so haben folgende Ausdrücke genau denselben Wert.

Es ist
$$\frac{f_1(x_0+d)}{f_2(x_0+d)} = \frac{f_1(x_0+d)-0}{f_2(x_0+d)-0} = \frac{f_1(x_0+d)-f_1(x_0)}{f_2(x_0+d)-f_2(x_0)}$$
$$= \frac{f_1(x_0+d)-f_1(x_0)}{d} \cdot \frac{d}{f_2(x_0+d)-f_2(x_0)}$$
$$= \frac{f_1(x_0+d)-f_1(x_0)}{d} \cdot \frac{1}{\frac{f_2(x_0+d)-f_2(x_0)}{d}}$$

und daher der Grenzwert $\lim\limits_{d=0} \frac{f_1(x_0+d)}{f_2(x_0+d)}$
$$= \lim_{d=0} \frac{f_1(x_0+d)-f_1(x_0)}{d} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{d=0} \frac{f_2(x_0+d)-f_2(x_0)}{d}} = \frac{f_1'(x_0)}{f_2'(x_0)},$$

falls $f_1'(x)$ den Differentialquotient von $f_1(x)$ und $f_2'(x)$ den von $f_2(x)$ bedeutet. Im obigen Beispiel ist demnach $f_1(x)=x^3+x^2-17x+15$, $f_1'(x)=3x^2+2x-17$, $f_2(x)=x^3-3x^2-4x+12$ und $f_2'(x) = 3x^2-6x-4$. Für $x=3$ finden wir dann $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ $= \frac{3x^2+2x-17}{3x^2-6x-4} = \frac{27+6-17}{27-18-4} = \frac{16}{5}$ als wahren Wert von $\frac{f_1(3)}{f_2(3)} = \frac{0}{0}$.

Eine noch viel wichtigere Anwendung der Differenzierung von Funktionen ist die Bestimmung der höchsten und niedrigsten Werte, welche dieselben annehmen können, also die **Berechnung ihrer Maxima und Minima**, beziehungsweise die Berechnung jener Werte der unabhängigen Veränderlichen x, für welche eine Funktion solche Werte annimmt. Dies ist dann möglich, wenn der Differentialquotient einer Funktion gleich Null gesetzt eine auflösbare Gleichung gibt. Wie wir schon an früherer Stelle bemerkt haben, spricht man von einem Maximum in der Umgebung von x_0, wenn die Funktion $f(x)$ stets kleinere Werte als $f(x_0)$ annimmt, mag x innerhalb des in

Betracht kommenden Intervalles von $x_0 - d$ bis $x_0 + d$ oberhalb oder unterhalb von x_0 liegen. Dagegen ist $f(x_0)$ ein Minimum, wenn alle anderen Werte dieses Intervalles größere Werte liefern als $f(x_0)$. Im ersteren Falle ist der Quotient $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ positiv, wenn $x_2 < x_0$, weil Zähler und Nenner negativ sind, und $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ ist negativ, wenn $x_1 > x_0$, denn $f(x_0)$ ist sowohl größer als $f(x_2)$, wie auch größer als $f(x_1)$. Bei einem Minimum ist der erstere Quotient negativ und letztere positiv. In beiden Fällen ändert daher der Differentialquotient sein Vorzeichen, während x in dieser Umgebung von x_0 von kleineren Werten als dieser zu größeren übergeht. Nehmen wir an, daß dieser Übergang nicht plötzlich geschieht, so muß der Differentialquotient gerade an jener Stelle gleich Null sein, wo die Funktion ihren größten oder kleinsten Wert annimmt. Wir finden daher diese Stelle, indem wir untersuchen, für welchen Wert von x die differenzierte Funktion den Wert Null annimmt, wodurch die Aufgabe auf die Lösung einer Gleichung zurückgeführt wird.

Es ist für die Geschichte der Mathematik charakteristisch, daß auch hier Aufgaben der angewandten Mathematik, insbesondere Untersuchungen über Probleme der Optik und Mechanik, den großen Physiker Isaak Newton veranlaßten, zur Bewältigung derselben dieses neue und überaus weittragende mathematische Hilfsmittel zu ersinnen. Er bezeichnet die Änderung einer Funktion als deren Fluxion, während der deutsche Mathematiker und Philosoph Leibniz, von andern Erwägungen ausgehend, die einer kleinen Zunahme von x entsprechende Änderung von $f(x)$ deren „Differential" nennt. Ersterer führt seine Entdeckung auf das Jahr 1666 zurück, letzterer auf die Jahre 1674—1677. Die ersten Veröffentlichungen fallen in die Jahre 1684—1686. Da sich begreiflicherweise die ersten Spuren der neuen epochemachenden Rechnungsart nicht leicht feststellen ließen, so entstand um das Jahr 1705 ein sehr heftig geführter Prioritätsstreit. Mit Leibniz arbeiteten an der Ausgestaltung der Differentialrechnung und der sich daran knüpfenden Integralrechnung die beiden Brüder Jakob und Johann Bernoulli in Basel, Lagrange in Turin, Euler in Petersburg, Gauß in Göttingen, Cauchy in Paris u. a., und bei den Engländern zeichneten sich durch ihre hervorragenden Leistungen auf diesem Gebiete besonders Wallis in Oxford, Taylor in London, Maclaurin in Winburgh, Hamilton in Dublin und Stokes in Cambridge aus.

Die Integration.

Gelingt es uns, eine solche Funktion der unabhängigen Veränderlichen x zu finden, die nach x differenziert eine uns bekannte Funktion von x gibt, so bezeichnet man erstere als ein „partikuläres Integral" der letzteren. $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ist demnach ein partikuläres Integral von $f'(x) = 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1$, und man schreibt dies mit den Zeichen an

$$\int (3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1) \, d x = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Aber nicht nur $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, sondern auch diese um irgend eine positive oder negative unveränderliche Zahl c vermehrte Funktion besitzt denselben Differentialquotient, weil der Differentialquotient des konstanten Teiles der Funktion immer gleich Null ist. Es ist also auch

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + c = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + C$$
$$= \int (3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1) \, d x,$$

und diesen wegen der Unbestimmtheit von C unbestimmten Wert des Integrals nennt man daher das „unbestimmte oder allgemeine Integral". Daher gilt der Satz:

Wenn $\frac{d f(x)}{d x} = f'(x)$, so ist $\int f'(x) \, d x = f(x) + C$ das allgemeine Integral. Das Integrationszeichen $\int$ deutete ursprünglich eine Summe an, und zwar eine Summe von Produkten, deren einer Faktor den Ausdruck $d x$ darstellt. Der Grund dieser Auffassung wird sich aus der Erörterung des bestimmten Integrales ergeben.

Aus den früher abgeleiteten Sätzen über die Differenzierung ergeben sich eine Reihe analoger Sätze über die Integration von Funktionen.

Das unbestimmte Integral der Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe der unbestimmten Integrale der einzelnen Summanden.

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] \, d x = \int f_1(x) \, d x + \int f_2(x) \, d x + C.$$

Die Einführung der sogenannten Integrationskonstanten C ist damit begründet, weil diese Gleichung auch für jeden um eine willkürliche Konstante vermehrten Ausdruck richtig bleibt. Dieser Satz ist eine Folge des schon früher bewiesenen Satzes, daß der Differentialquotient einer Summe gleich der Summe der Differentialquotienten gleich ist.

Das unbestimmte Integral des Produktes einer Funktion mit einer konstanten Zahl ist gleich dem mit dieser Konstanten multiplizierten unbestimmten Integral.

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx + C.$$

Dieser Satz beruht darauf, daß der Differentialquotient des Produktes einer Funktion mit einer Konstanten gleich ist dem mit derselben multiplizierten Differentialquotienten.

Das unbestimmte Integral der mit einer ganzen positiven Zahl $n > 0$ potenzierten unabhängigen Veränderlichen x ist

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Dies ist der Fall, weil $\dfrac{d\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)}{dx} = \dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{dx^{n+1}}{dx} = \dfrac{n+1}{n+1}\,x^{n+1-1} = x^n.$

Das Problem, dessen Lösung durch die Integralrechnung diese zu einem überaus wertvollen Hilfsmittel der reinen wie der angewandten Mathematik macht, ist aber folgendes. Nimmt eine Funktion $f(x)$ jedesmal um b zu oder ab, so oft x um den Betrag d größer wird, dann ist die gesamte Zu- oder Abnahme von $f(x)$ gleich $n \cdot b$, wenn x von x_0 bis x' ansteigt und $(x' - x_0) : d = n$. In diesem Falle konnten wir die Änderung von $f(x)$ leicht berechnen, weil die Zunahme von $f(x)$ der Zunahme von x proportional war. Die Integralrechnung gestattet aber diese Änderung auch dann zu ermitteln, wenn eine solche Proportionalität nicht besteht und nur die Geschwindigkeit der Änderung für jedes x durch eine Funktion von x, wenn also $f'(x)$ bekannt ist. Die Gesamtänderung erscheint dann als Summe vieler einzelner, untereinander verschiedener Änderungen und wurde deshalb als solche mit dem Buchstaben S oder mit $\int$ bezeichnet.

Wenn wir für jeden Wert von x den entsprechenden Wert von $y = f(x)$ durch eine endliche Reihe von Operationen festzustellen vermögen, so läßt sich die Änderung von y, die der Zunahme des x von x_0 bis x' entspricht, aus der Differenz $f(x') - f(x_0)$ berechnen. Ist uns aber nicht diese Funktion $f(x)$ selbst, sondern nur ihr Differentialquotient, also die Geschwindigkeit ihrer Zu- oder Abnahme bekannt und erscheint diese für jeden Wert von x durch die Funktionswerte von $f'(x)$ dargestellt, so können wir daraus zuerst durch Integration von $f'(x)$ die Funktion $f(x) = \int f'(x)\,dx$ und mit deren Hilfe auch $f(x') - f(x_0)$, also die Gesamtänderung aus der einzelnen Geschwindigkeitsänderung berechnen.

Um dies zu zeigen, zerlegen wir das Intervall von x_0 bis x'

in n beliebig kleine Intervalle von der Größe $d = \frac{x' - x_0}{n}$, die um so kleiner werden, je größer wir n wählen. Den Werten der unabhängigen Veränderlichen x_0, $x_0 + d = x_1$, $x_0 + 2d = x_2$ usw. bis $x_0 + (n-1)d = x_{n-1}$ und $x_0 + nd = x'$ entsprechen der Reihe nach die Funktionswerte $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2) \ldots f(x_{n-1})$ und $f(x')$, und wir können die zu suchende Differenz $f(x') - f(x_0)$ in folgende Summen zergliedern:

$$\begin{aligned} f(x') - f(x_0) &= -f(x_0) + [f(x_1) - f(x_1)] + [f(x_2) - f(x_2)] + \ldots \\ &\quad + [f(x_{n-1}) - f(x_{n-1})] + f(x') = [f(x_1) - f(x_0)] \\ &\quad + [f(x_2) - f(x_1)] + \ldots + [f(x') - f(x_{n-1})] \\ &= [f(x_0 + d) - f(x_0)] + [f(x_1 + d) - f(x_1)] + \ldots \\ &\quad + [f(x_{n-1} + d) - f(x_{n-1})]. \end{aligned}$$

Jede dieser Differenzen bleibt ungeändert, wenn wir sie mit einer Zahl $d = \frac{x' - x_0}{n}$ zuerst dividieren und dann wieder mit derselben multiplizieren. Wenn sich aber in jedem so erhaltenen Produkte z. B. im Ausdrucke $\frac{f(x_3 + d) - f(x_3)}{d} \cdot d$ der Nenner unbegrenzt der Null nähert, indem wir in $d = \frac{x' - x_0}{n}$ für n immer größere Werte einsetzen, so erhalten wir hier den Grenzwert $\lim_{d=0} \frac{f(x_3 + d) - f(x_3)}{d} = f'(x_3)$, und die Differenz $f(x') - f(x_0)$ erscheint als eine Summe von Produkten, deren erster Faktor der Differentialquotient von $f(x)$ für den betreffenden Wert von x ist, während den zweiten Faktor die Zunahme der Veränderlichen x darstellt, die man allgemein mit der Bezeichnung „Differential dx" hinter die zu integrierende Funktion setzt. $\int f(x)\,dx$.

Alle diese mit dem Differential multiplizierten Differentialquotienten geben also zusammen dieselbe Summe, wie die oben angeschriebenen Teildifferenzen, nämlich $f(x') - f(x_0)$, und diese Differenz stellt mithin die Gesamtzunahme einer Funktion dar, deren Differentialquotient für alle zwischen x' und x_0 liegenden Werte von x denselben Differentialquotient hat wie $f'(x)$.

Wir können daher die gesamte Zunahme einer Funktion, deren Differentialquotient wir kennen, auf folgendem Wege berechnen.

Das unbestimmte Integral von $f'(x)$ innerhalb der Grenzen x_0 und x' sei $y = f(x)$. Dann ist die auf diese Grenzen bezogene Gesamtzunahme einer Funktion, deren Differentialquotient innerhalb derselben mit $f'(x)$ übereinstimmt, gleich der Differenz

$$f(x') - f(x_0) = \int f'(x)\,dx \Big|_{x'} - \int f'(x)\,dx \Big|_{x_0} = \int_{x_0}^{x'} f'(x)\,dx,$$

die wir erhalten, wenn wir im unbestimmten Integral von $f'(x)$ zuerst $x = x'$ und dann $x = x_0$ setzen und diese beiden Funktionswerte voneinander subtrahieren.

Dabei bedeutet $\int f'(x)\,dx \Big|_{x'}$, daß in der Formel für das unbestimmte Integral von $f'(x)$, also in der Funktion $f(x)$ für x der Wert x' und $\int f'(x)\,dx \Big|_{x_0}$, daß für x der Wert x_0 einzusetzen und diese auszurechnen ist. $\int_{x_0}^{x'} f'(x)\,dx$ stellt also die oben angegebene Differenz dar, und diese heißt das „bestimmte Integral von $f'(x)$ zwischen den Grenzen x_0 und x'". Da die Integrationskonstante für Minuend und Subtrahend denselben Wert haben muß, so fällt diese Größe beim bestimmten Integral unter allen Umständen weg und kommt mithin für dasselbe nicht in Betracht.

Aber auch die Integrationskonstante C eines partikulären Integrales $f(x) = \int f'(x)\,dx$ läßt sich bestimmen, wenn wir den Wert von $f(x)$ auch nur für einen einzigen Wert von x genau kennen.

Eine Größe y, die von x abhängt, ändere sich z. B. in der Weise, daß sie für $x = 1$ vom Wert 0 an mit der Geschwindigkeit $f'(x) = \frac{x}{5} + 0{\cdot}3$ steigt und daher für $x = 1$ mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{5} + 0{\cdot}3 = 0{\cdot}2 + 0{\cdot}3 = 0{\cdot}5$ zunimmt. Für $x = 2$ ändert sie sich mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{5} \cdot 2 + 0{\cdot}3 = 0{\cdot}4 + 0{\cdot}3 = 0{\cdot}7$ und für $x = 3$ ist $f'(3) = \frac{1}{5} \cdot 3 + 0{\cdot}3 = 0{\cdot}6 + 0{\cdot}3 = 0{\cdot}9$. Das unbestimmte Integral ist in diesem Falle $f(x) = \int \left(\frac{1}{5} \cdot x + 0{\cdot}3\right) dx = \frac{1}{10}\, x^2 + 0{\cdot}3 \cdot x + C$.

Es soll zunächst die Zunahme von $y = f(x)$ berechnet werden, falls x vom Werte $x = 1$ bis $x = 3$ ansteigt.

Die Funktion, deren Differentialquotient $f'(x) = \frac{1}{5}\, x + 0{\cdot}3$ sein soll, ändert sich um $f(3) - f(1) = (0{\cdot}1 \cdot 3^2 + 0{\cdot}3 \cdot 3 + C) - (0{\cdot}1 \cdot 1^2 + 0{\cdot}3 \cdot 1 + C) = (1{\cdot}8 + C) - (0{\cdot}4 + C) = 1{\cdot}4$. Aus der Angabe, daß für $x = 1$ die Funktion $y = f(x) = 0$ ist, folgt aber noch: $f(1) = 0{\cdot}1 \cdot 1^2 + 0{\cdot}3 \cdot 1 + C = 0{\cdot}4 + C = 0$, und daher ist $C = -\,0{\cdot}4$. Unter dieser Annahme ist demnach $f(x) = 0{\cdot}1 \cdot x^2 + 0{\cdot}3 \cdot x + 0{\cdot}4$ die Funktion, welche allen oben gestellten Forderungen entspricht.

Die Verhältnisse.

Die Philosophenschule des Pythagoras im 6. Jahrhundert v. Chr. unterschied zweierlei „Verhältnisse“, nämlich **„arithmetische“** und **„geometrische“**. Zwei Zahlen stehen nach dieser Auffassung zueinander im gleichen „arithmetischen“ Verhältnis wie zwei andere Zahlen, wenn die Differenzen einander gleich sind. Die Geometrie legte aber noch die Bildung einer zweiten Art von Verhältnissen nahe, welche, da sie aus geometrischen Problemen hervorgingen, „geometrische“ genannt wurden, während man erstere nur im Gegensatz zu diesen als „arithmetische“ bezeichnete. An und für sich lassen sich beide ebensowohl arithmetisch wie geometrisch behandeln; in neuerer Zeit haben beide viel von ihrer traditionellen Bedeutung verloren, während sie im Altertum und Mittelalter einen hervorragenden Teil des mathematischen Unterrichts bildeten.

Da die „arithmetischen“ Verhältnisse nicht annäherungsweise so viel Interesse erweckten, wie die „geometrischen“ und letztere daher eine viel ausgedehntere Behandlung erfuhren, so wird der Ausdruck „Verhältnis“ fast ausschließlich nur für diese verwendet. Ein sehr naheliegendes geometrisches Problem ist die Erörterung des Zusammenhanges zwischen der Länge der Dreieckseiten und der Größe der Winkel. Bei ähnlichen Dreiecken spielt aber die Differenz der Seitenlängen, mithin auch deren „arithmetisches Verhältnis“ keine Rolle, wohl aber das „Verhältnis“ ihrer Längen, falls wir darunter den **Quotient** ihrer Maßzahlen verstehen. Die Bestimmung dieses Quotienten stößt aber unter Umständen auf eine eigenartige Schwierigkeit. Messen wir die Längen zweier Dreieckseiten mit einem Maßstab, so gelangen wir nur zu unvollständigen und daher nicht zu genauen Zahlen im Sinne der Arithmetik. In diesem Falle kann natürlich auch der Quotient nicht genau festgestellt werden. Ein zweiter Lösungsweg ist der, daß wir die Länge der einen Seite als Einheit auffassen und dieselbe auf der anderen so oft als möglich auftragen, wodurch wir eine ganze Zahl als Quotient q_1 und möglicherweise noch eine Strecke r_1 als Rest erhalten. Tragen wir diese Reststrecke r auf der Einheitsstrecke auf, so erhalten wir einen zweiten Quotient q_2 in Zahlenform und wieder eine Strecke r_2 als Rest. Sind a und b die beiden Dreieckseiten, so ergibt sich demnach, wenn wir b als Einheitsstrecke verwenden,

$$a = q_1 \cdot b + r_1, \quad b = q_2 \cdot r_1 + r_2, \quad r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3, \quad r_2 = q_4 \cdot r_3 + r_4.$$

Führt dieses Verfahren zu einem Abschluß, indem ein späterer Rest im vorhergehenden ohne weiteren Rest enthalten ist, so können

wir das Verhältnis der beiden Strecken a und b durch den Quotient zweier Zahlen genau ausdrücken, und nennen dann denselben das Verhältnis der Strecken a und b.

Ist z. B. $r_4 = 0$ und daher $r_2 = q_4 \cdot r_3$, $r_1 = q_3 \cdot q_4 r_3 + r_3 = r_3 (q_3 \cdot q_4 + 1)$, $b = q_2 (q_3 q_4 + 1) r_3 + q_4 r_3 = (q_2 q_3 q_4 + q_4 + q_2) r_3$, $a = q_1 (q_2 q_3 q_4 + q_4 + q_2) r_3 + (q_3 q_4 + 1) r_3 = (q_1 q_2 q_3 q_4 + q_3 q_4 + q_1 q_4 + q_1 q_2 + 1) r_3$,

so ist $\frac{a}{b} = \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_3 q_4 + q_1 q_4 + q_1 q_2 + 1}{q_2 q_3 q_4 + q_4 + q_2}$.

Es läßt sich aber auf rein geometrischem Weg zeigen, daß es solche Dreiecke, wie z. B. das gleichschenklige, rechtwinklige Dreieck gibt, bei welchen dieses Verfahren zu keinem Abschluß führen kann, und dann ist auch die Möglichkeit ausgeschlossen, das Verhältnis der beiden Strecken a und b durch den Quotient zweier ganzer Zahlen genau darzustellen. In diesem Falle müssen wir uns wie bei den Grenzwerten damit begnügen, den Wert dieses Verhältnisses durch eine rationale Zahl wenigstens so genau anzugeben, daß sie vom wahren Wert weniger abweicht als eine beliebig kleine Zahl ε. Führt das oben angeführte Verfahren zur Auffindung eines letzten Restes (r_3), der zugleich ein größtes gemeinsames Maß von a und b ist, so sagen wir, diese beiden Strecken seien „kommensurabel", im gegenteiligen Fall nennen wir sie „inkommensurabel". Das Verhältnis irgend zweier „inkommensurabler" Größen läßt sich mithin durch den Quotient zweier ganzer Zahlen nie genau darstellen, und ist mithin keine rationale Zahl. Es stellt demnach eine neue Art von Zahlen dar, die wir im Gegensatz zu den rationalen Zahlen als „irrationale" bezeichnen, weil sie dem bisher verwendeten Zahlengebiet nicht angehören. Die Gebiete der rationalen und irrationalen Zahlen bilden zusammengenommen das Gebiet der „reellen Zahlen".

Das Verhältnis zweier Zahlen a und b drückt man gewöhnlich in der Form aus $a:b$ und bezeichnet die dem Dividend entsprechende Zahl a als „Vorderglied" und die dem Divisor entsprechende Zahl b als „Hinterglied". Der Begriff „Verhältnis" unterscheidet sich vom Begriff „Quotient" nur darin, daß letzterer gewöhnlich aus der Division von ganzen oder gebrochenen Zahlen hervorgeht und dann wieder eine rationale Zahl darstellt, während das „Verhältnis" sich auch auf inkommensurable Größen beziehen und eine irrationale Zahl bedeuten kann.

Die Proportionen.

Das Rechnen mit den Verhältnissen und Proportionen gewährte den Mathematikern des Altertums einen, wenn auch nicht vollständigen, Ersatz für den Begriff der reellen, d. h. der rationalen oder irrationalen Zahl. In den „Elementen von Euklid" im 5. und 7. Buche wird dieses Problem in wissenschaftlich mustergültiger Weise behandelt. Der berühmte Philosoph und Staatsmann Boëthius († 480 in Pavia) stellte den Satz auf:

Unter einer „Proportion" versteht man die Gleichstellung zweier Verhältnisse.

Da die zu vergleichenden Verhältnisse auch irrationale Zahlen darstellen können, so lassen sich die bisherigen Gleichheitserklärungen in diesem Falle nicht anwenden. Wir müssen auf dieselben eine andere Gleichheitsdefinition anwenden, welche unter allen Umständen festzustellen gestattet, ob die Verhältnisse $a:b$ und $c:d$ einander gleich sind, ob also die Proportion $a:b=c:d$ richtig ist.

Wenn wir das Hinterglied des Verhältnisses $a:b$, also b in n gleiche Teile $\frac{b}{n}$ teilen, so muß a, wenn es nicht ein Vielfaches von $\frac{b}{n}$ ist, zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Vielfachen $m \cdot \frac{b}{n} < a < (m+1)\frac{b}{n}$ liegen. Unter dieser Annahme liegt der Wert des Verhältnisses $a:b$ zwischen den rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$, die sich um $\frac{1}{n}$ unterscheiden.

Liegt der Wert des Verhältnisses $c:d$ zwischen denselben Grenzen wie $a:b$, auch wenn wir n beliebig groß, also den Unterschied der beiden Grenzen $\frac{1}{n}$ beliebig klein wählen, so sagen wir, die Verhältnisse $a:b$ und $c:d$ sind einander gleich.

Es ist dies im wesentlichen dieselbe Gleichheitsdefinition wie bei den Grenzwerten, und diese setzt eben nicht voraus, daß $a:b$ und $c:d$ zwei gleiche Verhältnisse zwischen kommensurablen Größen sind.

Der Wert eines Verhältnisses ändert sich nicht, wenn man das Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliziert oder durch dieselbe Zahl dividiert.

Liegt der Wert des Verhältnisses $a:b$ zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, so liegt auch der Wert des Verhältnisses $(q \cdot a):(q \cdot b)$ zwischen

diesen Grenzen. Aus $m \cdot \frac{b}{n} < a$ folgt nämlich $qm \cdot \frac{b}{n} < q \cdot a$ und aus $a < (m+1)\frac{b}{n}$ folgt $q \cdot a < q \cdot (m+1)\frac{b}{n}$ und daher $\frac{m}{n} qb < qa < \frac{m+1}{n} qb$. Die Quotienten $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$, zwischen denen $\frac{a}{b}$ und $\frac{qa}{qb}$ liegen, unterscheiden sich also in beiden Fällen nur um $\frac{1}{n}$. Dies gilt aber auch dann, wenn q eine gebrochene Zahl von der Form $q = \frac{1}{p}$ ist, also wenn wir Vorderglied und Hinterglied durch p dividieren.

In jeder richtigen Proportion und nur in einer solchen ist das Produkt der äußeren und der inneren Glieder gleich.

Multiplizieren wir Vorderglied und Hinterglied des ersten Verhältnisses der Proportion $a : b = c : d$ mit d und die des zweiten Verhältnisses mit b, so erhalten wir Verhältnisse mit gleichen Hintergliedern, und diese müssen daher auch gleiche Vorderglieder haben. Aus $(ad) : (bd) = (cb) : (bd)$ folgt mithin $a \cdot d = b \cdot c$, d. h. die aus den äußeren und inneren Gliedern gebildeten Produkte sind einander gleich.

Mit den Gliedern einer richtigen Proportion kann man alle Veränderungen vornehmen, bei welchen das Produkt der äußeren und inneren Glieder gleichbleibt, weil dies bei der ursprünglichen Proportion der Fall war.

Wenn also $a : b = c : d$ und daher $a \cdot d = b \cdot c$, so sind auch die Proportionen richtig:

$d : b = c : a,$ weil $d \cdot a = b \cdot c$
$a : c = b : d,$ „ $a \cdot d = c \cdot b$
$d : c = b : a,$ „ $d \cdot a = c \cdot b$
$b : a = d : c,$ „ $b \cdot c = a \cdot d$
$(am) : (b \cdot m) = c : d,$ „ $a \cdot m \cdot d = b \cdot m \cdot c$
$(a \cdot m) : b = (c \cdot m) : d,$ „ $a \cdot m \cdot d = b \cdot m \cdot c$
$(a : m) : (b : m) = c : d,$ „ $(a : m) \cdot d = (b : m) \cdot c$
$(a : m) : b = (c : m) : d,$ „ $(a : m) \cdot d = b \cdot (c : m)$

Es ist ferner

$(a + b) : (c + d) = a : c,$ „ $ac + bc = ca + da$ und daher $bc = da$
$(a - b) : (c - d) = a : c,$ „ $ac + bc = ca - da$ „ „ $bc = da$

Daher ist auch

$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d),$
$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d),$ weil $ac + bc - ad - bd$
$= ac - bc + ad - bd$ und $bc - ad = 0.$

Wenn $a:b=c:d$ und $a':b'=c':d'$, mithin $a\cdot d=b\cdot c$ und $a'\cdot d'=b'\cdot c'$, so ist auch $(a\cdot a'):(b\cdot b')=(c\cdot c'):(d\cdot d')$, weil $a\cdot a'\cdot d\cdot d' = b\cdot b'\cdot c\cdot c'$. Hieraus folgt ferner, daß auch $a^2:b^2=c^2:d^2$ und daß allgemein $a^n:b^n=c^n:d^n$.

Sind mehr als zwei Verhältnisse einander gleich, ist also $a:a' = b:b'=c:c'=d:d'$, so kann man denselben die Proportionen entnehmen: $a:a'=b:b'$, $b:b'=c:c'$, $c:c'=d:d'$ und $d:d'=a:a'$, mithin bestehen auch die Proportionen: $a:b=a':b'$, $b:c=b':c'$, $c:d=c':d'$ und $d:a=d':a'$. Letztere pflegt man auch in der Form zusammenzufassen $a:b:c:d=a':b':c':d'$ und bezeichnet dieselbe als eine „fortlaufende Proportion". Diese Darstellungsform hat aber nur den Zweck, die obigen Proportionen kurz zusammenzufassen und dieselben durch Zusammenstellung von je zwei gleichgestellten Gliedern links und rechts vom Gleichheitszeichen daraus abzuleiten. Wir können daraus aber auch den Satz ableiten:

$(a+b+c+d):(a'+b'+c'+d')=a:a'=b:b'=c:c'=d:d'=k,$ denn aus $a=a'k$, $b=b'\cdot k$, $c=c'\cdot k$ und $d=d'\cdot k$ folgt durch Addition $a+b+c+d=a'\cdot k+b'\cdot k+c'\cdot k+d'\cdot k=(a'+b'+c'+d')\,k$ oder

$$k=(a+b+c+d):(a'+b'+c'+d')=a:a'= \text{usw.}$$

Ein letzter Rest der ehemaligen Einteilung der Verhältnisse in arithmetische und geometrische hat sich in den Ausdrücken „arithmetisches" und „geometrisches Mittel" erhalten. Eine Proportion nennt man „stetig", wenn die beiden innern Glieder einander gleich sind, und ihren gemeinsamen Wert bezeichnete man daher als das „arithmetische", beziehungsweise „geometrische Mittel" der beiden andern Glieder, je nachdem die Proportion aus zwei „arithmetischen" oder „geometrischen" Verhältnissen zusammengesetzt war. Im ersten Fall ergibt sich aus $a-b=b-c$, daß $a+c=2\cdot b$, also $b=\frac{a+c}{2}$ das **arithmetische Mittel** zwischen a und c sei. Im zweiten Falle folgt aus der Proportion $a:b=b:c$, daß $b^2=a\cdot c$ und daher das **geometrische Mittel** zwischen a und c, also $b=\sqrt{a\cdot c}$. Einen andern Mittelwert erhalten wir aus der Proportion: $(a-b):(b-c)=a:c$; dann ergibt sich aus $a\cdot c-b\cdot c=a\cdot b-a\cdot c$ zunächst $2\,a\cdot c=b\,(a+c)$ und daraus $b=\frac{2\,a\,c}{a+c}$; diesen Mittelwert bezeichnet man nach einem der pythagoräischen Philosophenschule entnommenen Ausdruck der Musiklehre, das **harmonische Mittel.** Wenn nämlich eine Saite gespannt einen bestimmten Ton gibt, falls ihre Länge z. B. $a=60$ cm beträgt, so erhalten wir bei der gleichen Spannung und einer Länge von $c=40$ cm die Quint jenes Tones, und wenn wir

nach der obigen Formel zu $a = 60$ und $c = 40$ den Wert $b = 48$ berechnen, so erhalten wir jene Saitenlänge, deren Ton man als die große Terz bezeichnet und der zu den beiden ersten Tönen „harmonisch“ klingt. Der reziproke Wert davon $\frac{1}{b} = \frac{a+c}{2ac} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right]$ ist zugleich das arithmetische Mittel der beiden reziproken Werte von a und c, oder es besteht zwischen den drei reziproken Werten die arithmetische Progression $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$.

Die einfache und zusammengesetzte Proportionalität.

Weit mehr als wegen ihrer Beziehung zu andern Gebieten der Arithmetik verdanken die Proportionen ihre große Bedeutung dem fast unabsehbar reichen Gebiete ihrer Anwendungen. Diese zerfallen in zwei Hauptgruppen, deren eine das Verkehrs- und Gesellschaftsleben beherrscht, während die andere den exakten Naturwissenschaften angehört. Die Anwendung der Proportionen tritt nämlich überall dort in den Vordergrund, wo es sich um Messungen handelt, die durch das Verhältnis zu einer gewissen Einheitsgröße bestimmt werden. Ist a' die Einheit einer bestimmten Größenart und a irgend eine dieser Größen, so bezeichnet man m als die Maßzahl derselben, wenn $a : a' = m$ und daher $a = m \cdot a'$. Man sagt auch $a = m$ und fügt zur Maßzahl die Benennung der Einheitsgröße hinzu, z. B. m Kilogramm.

Wir haben früher einen Ausdruck von der Form $y = f(x) = m_3 x^2 + m_2 x^2 + m_1 x + m_0$ als eine Funktion von x bezeichnet, denn sie ordnet jedem Werte von x einen Wert von y zu. So erhalten wir eine Reihe von x-Werten und eine Reihe ihnen entsprechender y-Werte, also zwei Reihen von Werten, die zueinander in einer durch die Funktion bestimmten Beziehung stehen, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2), \ldots$ einerseits und $x_1, x_2, \ldots$ andererseits.

Zwei Reihen von Größen sind einander proportional, wenn dem n-fachen Wert der einen Größenart der n-fache Wert der andern entspricht.

Diese Bedingung ist bei der oben angegebenen Funktion erfüllt, wenn $m_3 = m_2 = m_0 = 0$ und daher $y = f(x) = m_1 \cdot x$. Ersetzen wir nämlich in $y' = m_1 \cdot x'$ den Wert x' durch $n x$, so folgt hieraus $y' = m_1 \cdot n x = n \cdot m_1 x = n \cdot y$. Diese Proportionalität ist also

ein spezieller Fall, der durch die obige Funktion ausgedrückten Beziehung.

Verschiedenartige Größen, die zueinander in einer solchen Beziehung stehen, gibt es in Menge. Ein altes Beispiel, mit dem sich schon der arabische Mathematiker Al Battani († 929 in Damaskus) befaßte, ist die Beziehung der Länge eines vertikalen Stabes zu seinem Schatten. Wenn man zur gleichen Zeit das Verhältnis der Längen verschiedener vertikaler Stäbe y zu ihren Schattenlängen x feststellt, so erhält man dieselbe Verhältniszahl „$y:x$". Wir können dann für irgend zwei Messungen die Proportion $y:x=y':x'$ aufstellen.

Einen wesentlich verschiedenen Fall enthält die aus dem ersten Jahrhundert v. Chr. stammende „Heronsche Brunnenaufgabe": Aus zwei Röhren fließen in gleichen Zeitabschnitten verschiedene Wassermengen w und w'. Wie verhalten sich die Zeiträume t und t', die nötig sind, um aus jeder Brunnenröhre einzeln dasselbe Gefäß zu füllen? Ist $w:w'=k$ und vergleichen wir die Zeiträume t und t', so zeigt sich, daß das Verhältnis $t:t'=\frac{1}{k}$ und $t':t=k$, daß mithin die Proportion besteht $w:w'=t':t$, in welcher das Vorderglied des ersten Verhältnisses nicht dem Vordergliede, sondern dem Hintergliede des zweiten entspricht. In diesem Falle haben die Verhältnisse entsprechender Größen nicht denselben, sondern den reziproken Wert, und daher bilden nur die reziproken oder verkehrten Verhältnisse eine Proportion; solche Größenarten heißen „verkehrt proportional".

Aus der Proportion $w:w'=t':t$ folgt aber $w\cdot t=w'\cdot t'$, und deshalb können wir den Satz aufstellen:

Zwei voneinander abhängige Größen sind (gerade oder direkt) proportional, wenn das Verhältnis (der Quotient) je zweier sich entsprechender Größen gleichbleibt, sie sind dagegen verkehrt oder invers proportional, wenn das Produkt je zweier sich entsprechender Größen stets gleich ist.

Wenn in der oben angeführten Funktion von x die Koeffizienten $m_3=m_1=m_0=0$ und daher $y=m_2\cdot x^2$ und $y'=m_2\cdot x'^2$, also $y:y'=x^2:x'^2$, so sagt man, die Werte von y seien den Quadraten der Werte von x proportional. Wie diese beiden Zahlen, so können auch zwei verschieden benannte Größen zueinander in dieser Beziehung stehen, wie z. B. die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke den Quadraten homologer Seiten proportional und die zwischen zwei Himmelskörpern wirksamen Beschleunigungen den Quadraten ihrer Abstände verkehrt proportional sind.

Wenn wir die beiden Proportionen $y : y' = x : x'$ und $y : x = y' : x'$ miteinander vergleichen, so sehen wir, daß in der ersten das Verhältnis zweier Größen der einen Art dem Verhältnis zweier Größen der andern Art gleichgestellt wird. In der zweiten begegnen wir dagegen den Verhältnissen je zweier ungleichartiger Größen. Letztere stehen zueinander in einer ähnlichen Beziehung, wie der Funktionswert y zur unabhängigen Veränderlichen x. Nimmt letztere den Wert 1 an, so erhalten wir einen Funktionswert, den man bei benannten Größen als „Proportionalitätsfaktor" bezeichnet.

Unter dem **Proportionalitätsfaktor** zweier Größenarten y und x verstehen wir die Maßzahl y' jener Größe ersterer Art, die der Einheit der zweiten Größenart $x' = 1$ angehört. Den entsprechenden Wert y der ersteren Größenart zu einem vorgegebenen Wert x der zweiten Art finden wir dann, indem wir diesen mit dem Proportionalitätsfaktor y' multiplizieren.

Wenn $y : x = y' : x'$ und dem $x' = 1$ der Wert y' entspricht, so folgt daraus $y = y' \cdot x$ und daß $y' = k$ der Proportionalitätsfaktor, also allgemein $y = k \cdot x$ ist. Andererseits finden wir diesen für alle Berechnungen proportionaler Größen so wichtigen Zahlenwert nach der Proportion $y : x = y' : 1$ aus der Formel $y' = y : x$, indem wir irgend zwei sich entsprechende Maßzahlen beider Größenarten durcheinander dividieren. Man wählt dazu immer zwei für die Messung besonders günstige Werte, um dann aus ihrem Quotienten das y' und damit alle übrigen Werte berechnen zu können. Sind die beiden Größenarten verkehrt proportioniert, so folgt aus $y : y' = x' : x$ für $x' = 1$, daß der Proportionalitätsfaktor $y' = k = y \cdot x$ dem Produkte irgend zweier entsprechender Größen gleich ist, und dann $y = \frac{k}{x}$ ist.

In allen diesen Fällen haben wir angenommen, daß die Werte von y nur von den Veränderungen einer einzigen Größe x abhängen. Man spricht in diesem Falle von **einfacher** Proportionalität. Es kommt aber auch sehr oft vor, daß die Werte von y nicht nur dann den n-fachen Wert annehmen, wenn wir von x auf $n \cdot x$ übergehen, sondern auch eine zweite unabhängig veränderliche Größe z durch den n-fachen Betrag ersetzt wird.

Besteht die Proportion $y : y' = x : x'$, während die Größe z, von der y zugleich abhängt, immer denselben Wert beibehält und ist $y : y' = z : z'$, während x seinen Wert nicht ändert, so besteht die Proportion $y : y' = (x \cdot z) : (x' \cdot z')$.

Wenn dagegen neben der Proportion $y : y' = x : x'$ für unver-

änderliche Werte von z die Proportion $y:y'=z':z$ für dieselben Werte von x besteht, so gilt die Proportion $y:y'=(x:z):(x':z')$.

In diesen beiden Fällen spricht man von **zusammengesetzter** Proportionalität.

Im ersten Falle erhalten wir nämlich den Proportionalitätsfaktor $y'=k$, wenn wir $x'=1$ und $z'=1$ setzen; dann folgt aus $y'=kx'z'=k$ und aus $y=kxz$, daß zunächst die Proportion besteht $y:y'=(kxz):(kx'z')$, die sich durch k kürzen läßt, und daraus die neue Proportion $y:y'=(x\cdot z):(x'\cdot z')$.

Im zweiten Falle folgt aus $y'=kx':z'=k$ für $x'=1$ und $z'=1$ und aus $y=kx:z$, daß die Proportion besteht $y:y'=(kx:z):(kx':z')$ und, nachdem der Dividend der beiden letzten Glieder durch k gekürzt worden ist, die Proportion $y:y'=(x:z):(x':z')$.

Wenn eine Größenart y mehreren Größenarten x, t und u direkt, anderen Größenarten v und w aber verkehrt proportional ist, so ist $y=\frac{x\cdot t\cdot u}{v\cdot w}\cdot y'$, wenn y' wieder den Proportionalitätsfaktor, also jenen Wert von y bedeutet, welchen wir erhalten, falls x, t, u, v und w durch die Einheit ihrer Größenart ersetzt werden.

Dieser Satz läßt sich in der Weise umkehren, daß man sagt:

Ist eine Größe y von einem Ausdruck mit mehreren andern Größen in der Weise abhängig, daß $y=\frac{x\,t\,u}{v\cdot w}\cdot y'$, dann ist y allen im Zähler vorkommenden Größen direkt und allen im Nenner vorkommenden Größen verkehrt proportional, wenn alle übrigen als unveränderlich angesehen werden.

Die Teilregel, Mischungs- und Gesellschaftsrechnung.

Die „Teilregel" löst die Aufgabe, eine Zahl in solche Summanden zu zerlegen, die zueinander in bekannten Verhältnissen stehen.

Es sollen z. B. drei Zahlen x, y und z gesucht werden, für die $x+y+z=s$ und zugleich die fortlaufende Proportion besteht $x:y:z=a:b:c$. Dann folgt aus letzterer $(x+y+z):(a+b+c)$ $=x:a=y:b=z:c=s:(a+b+c)$.

Setzen wir also $a+b+c=s'$, so ergeben sich hieraus die Lösungen: $x=a\cdot\frac{s}{s'}$, $y=b\cdot\frac{s}{s'}$ und $z=c\cdot\frac{s}{s'}$. Der Vorteil der Teilregel besteht mithin darin, daß man zuerst den Quotient $\frac{s}{s'}$ aus der

zu teilenden Summe und der Summe der bekannten Verhältniszahlen berechnet und denselben mit den einzelnen Verhältniszahlen multipliziert. In dieser allgemeinen Form ausgesprochen bildet die Teilregel die Grundlage für die verschiedenen Formen der Mischungs- und Gesellschaftsrechnung.

Die **„Mischungsrechnung“** knüpft sich an die Erzählung, wie Archimedes (287—212 in Syracus) im Auftrage des Königs Hiero eine Krone auf ihren Goldgehalt prüfte, und daran reihen sich viele ähnliche Aufgaben über den sogenannten „Feingehalt“ der Edelmetalle, die man auch unter dem Namen „Gold- und Silberrechnung“ zusammenfaßte.

Die archimedische Kronenaufgabe wird im Sinne der Teilregel folgendermaßen gelöst: v sei das Volumen der Krone, v' das des in ihr enthaltenen Goldes und v'' das des Silbers. Die scharfsinnige Lösung des Archimedes bestand darin, daß er das Verhältnis $v':v''$ mit Hilfe des spez. Gewichtes zu bestimmen verstand. Ist s das spez. Gewicht der Mischung, s' das des Goldes und s'' das des Silbers, dann ist $v \cdot s = (v' + v'') \cdot s = v' \cdot s + v'' \cdot s = v' \cdot s' + v'' \cdot s''$ und daher $v'(s' - s) = v'' \cdot (s - s'')$.

Aus der daraus abgeleiteten Proportion $v' : v'' = (s - s'') : (s' - s)$ folgt zunächst: $(v' + v'') : [(s - s'') + (s' - s)] = v' : (s - s'')$, und daraus wegen $v = v' + v''$ $v : (s' - s'') = v' : (s - s'')$. Daher ist $v' = \frac{s' - s''}{s - s''} \cdot v$.

Bei den Aufgaben über den sogenannten „Feingehalt“ wird der auf 1000 Gewichtsteile der Mischung entfallende Gehalt an reinem Gold als „Feingehalt“ bezeichnet. Während bei der Kronenaufgabe das Gewicht des in der Krone enthaltenen Goldes erst aus dem Volumen nach der Formel $g' = v' \cdot s'$ berechnet werden muß, erhalten wir hier das Gewicht des Goldes unmittelbar aus den gegebenen Verhältniszahlen. Ist f der in Tausendteilen ausgedrückte Feingehalt einer Legierung, so sind in g Gewichtsteilen derselben $g' = \frac{f \cdot g}{1000}$ „feines“ Metall enthalten, denn es besteht die Proportion $g' : g'' = f : (1000 - f)$, wenn g' und g'' die den beiden Bestandteilen entsprechenden Gewichte bedeuten. Ist also $g = g' + g''$, so folgt hieraus: $g : 1000 = g' : f$, somit der oben angeführte Betrag für g'. Der Feingehalt von Goldlegierungen wird auch in „Karaten“ angegeben, wobei die Summe der Verhältniszahlen statt 1000 nur 24 beträgt und daher $g' = \frac{g \cdot k}{24}$ für k-karatiges Gold.

Ein anderes aus dem Altertum stammendes Problem ist die mit dem griechischen Mechaniker Heron in Alexandrien (1. Jahrh. v. Chr.)

in Verbindung gebrachte „Brunnenaufgabe". Die aus mehreren Röhren in derselben Zeit ausfließenden Wassermengen w_1, w_2 und w_3 reichen hin, um denselben Brunnenschacht einzeln in t_1, beziehungsweise t_2 und t_3 Zeiteinheiten zu füllen. In welcher Zeit wird dieser gefüllt, falls alle Brunnen gleichzeitig fließen? Die in jeder Zeiteinheit aus den einzelnen Röhren fließenden Wassermengen verhalten sich offenbar verkehrt wie die zur Füllung des Schachtes nötigen Zeiträume. Daher besteht die Proportion $w_1 : w_2 : w_3 = \frac{1}{t_1} : \frac{1}{t_2} : \frac{1}{t_3}$ und aus. ihr folgt $(w_1 + w_2 + w_3) : \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = w_1 : \frac{1}{t_1}$. Verwenden wir den Inhalt des vollen Schachtes als Einheit, dann fließt aus der ersten Brunnenröhre in der Zeiteinheit die Wassermenge $w_1 = \frac{1}{t_1}$, weil sie allein den Brunnenschacht in t_1 Zeiteinheiten zu füllen vermag und, wenn aus einer andern Röhre in der Zeiteinheit die Wassermenge w fließt, so wird dieselbe den Brunnenschacht in $t = \frac{1}{w}$ Zeiteinheiten füllen. Da also $w_1 : \frac{1}{t_1} = 1$, so folgt aus der obigen Proportion, falls wir $w_1 + w_2 + w_3 = w = \frac{1}{t}$ setzen, daß $w = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}$ $= \frac{t_2 \cdot t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2}{t_1 \cdot t_2 \cdot t_3} = \frac{1}{t}$ und daher ist $t = \frac{t_1 \cdot t_2 \cdot t_3}{t_2 \cdot t_3 + t_3 \cdot t_1 + t_1 \cdot t_2}$.

Die „**Gesellschaftsrechnung**" befaßt sich mit derselben Aufgabe wie die Teilregel, unterscheidet sich aber von ihr in der Weise, daß sich die Teilung der Summe nicht nur nach einer, sondern nach mehreren Reihen von Verhältniszahlen richtet. Sind die Teile x, y und z der zu teilenden Summe s nicht nur den Größen a, b und c, sondern auch den Größen a', b' und c' direkt und den Größen a'', b'' und c'' verkehrt proportional, so besteht die zusammengesetzte Proportion: $x : y : z = \frac{a \cdot a'}{a''} : \frac{b \cdot b'}{b''} : \frac{c \cdot c'}{c''}$ und aus dieser folgt, wenn $x + y + z = s$ und $\frac{a \cdot a'}{a''} + \frac{b \cdot b'}{b''} + \frac{c \cdot c'}{c''} = s'$ $s : s' = x : \frac{a \cdot a'}{a''}$ usw. Es ist also $x = \frac{s}{s'} \cdot \frac{a \cdot a'}{a''}$, $y = \frac{s}{s'} \cdot \frac{b \cdot b'}{b''}$ und $z = \frac{s}{s'} \cdot \frac{c \cdot c'}{c''}$.

Prozentrechnung, Rabatt, Diskonto und Terminrechnung.

Das bei den älteren Kulturvölkern schon früh entwickelte Rechts- und Verkehrsleben brachte es mit sich, daß nicht nur für die Nutznießung von Grund und Boden, sondern auch für die zu größeren Unternehmungen vorgestreckten Geldbeträge eine gewohnheitsmäßig oder sogar gesetzlich geregelte Miete bezahlt wurde. Dementsprechend entwickelte sich alsbald eine Rechnungsmethode, nach der man mechanisch für das ausgeliehene Kapital (caput) die vertragsmäßigen „Zinsen" (fenus, usura) berechnen konnte. Wenn jeden Monat der hundertste Teil des Kapitals als Zins bezahlt werden mußte, so bezeichnete man das im alten Rom als „centesimae usurae". Gewöhnlich wurde aber schon damals der Zinsbetrag auf das ganze Jahr bezogen, und der „für Hundert" Werteinheiten des Kapitals festgesetzte Zinsbetrag wurde mit dem Zusatz „pro centum" bezeichnet. Das Zeichen $^0/_0$ ging aus der im kaufmännischen Verkehr allgemein üblichen Abkürzung von „Cento" Cto hervor. Bezeichnen wir die Zinsen eines Kapitals K mit z und die „Prozente" mit p, so ergeben sich die einjährigen Zinsen aus der Proportion: $z:K = p:100$. Erstreckt sich aber die Verzinsung auf einen andern Zeitraum j, dessen Maßzahl auf das Jahr als Einheit bezogen wird, so sind die Zinsen auch noch der Verzinsungsdauer proportional, und aus der zusammengesetzten Proportion $z:K = pj:100$ folgt dann die bekannte Formel $z = \frac{p \cdot j \cdot K}{100}$. Wird der Zins nach Ablauf des Jahres „zum Kapital geschlagen", sei es, um mit diesem zurückbezahlt oder neuerdings auf Zinsen angelegt zu werden, so ist $K + z = K + \frac{pK}{100} = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Bedeutet also p den auf 100 Einheiten des Kapitalwertes bezogenen „Zinsfuß", so ist die Zahl q, mit der man das Kapital multiplizieren muß, um seinen durch die Zinsen vermehrten Wert am Ende eines Jahres zu erhalten, $q = 1 + \frac{p}{100}$ der „Aufzinsungsfaktor". Der Zinsfuß mußte zu wiederholten Malen bei verschiedenen Völkern gesetzlich eingeschränkt werden, wie z. B. durch die „Lex Genucia" im Jahre 342 v. Chr. in Rom. Die Verzinsung ist aber zu tief im Verkehrsleben begründet, als daß sich die oft erlassenen vollkommenen Zinsverbote jemals auch nur kurze Zeit erfolgreich behauptet hätten. Diese Verbote waren und sind immerhin insofern moralisch berechtigt,

als man niemand zwingen kann, für geliehenes Geld Zinsen zu bezahlen, wenn die Summe nicht unter solchen Bedingungen vorgestreckt wurde, die gesetzlich eine Verzinsung nach sich ziehen. Auch darf niemand gezwungen werden, ein Kapital länger oder in einem größeren Umfange zu verzinsen, als er bei der Übernahme zu verzinsen sich verpflichtet hat. Daher ist auch in den neuesten Gesetzgebungen die Verzinsung nicht ausbezahlter Zinsen nur dann zulässig erklärt worden, wenn dies wie bei Sparkassen vertragsmäßig ausbedungen und gesetzlich geregelt wird. Aus diesem Grunde kommt die obige Formel für die mehrjährige Verzinsung kaum in Betracht. Andererseits wird sie aber zur Berechnung der Zinsen innerhalb eines Jahres fast ausschließlich verwendet, und dies ist besonders beim „Wechsel" der Fall.

Unter einem **„Wechsel"** versteht man einen rechtskräftigen Schein, durch den sich der „Aussteller" dem „Empfänger" gegenüber verpflichtet, an einem bestimmten Tage — zur „Verfallszeit" — denselben demjenigen gegenüber mit einer bestimmten Geldsumme „einzulösen", der den Wechsel „präsentiert". Der Empfänger kann den Wechsel dem „Giroverkehr" übergeben, d. h. einem Dritten und dieser einem Vierten an Stelle von Bargeld übergeben, ohne daß diese verpflichtet sind, den Wechsel wie gesetzlich eingeführte Wertsorten zum vollen Betrage anzunehmen. Wird ein Wechsel vor der Verfallzeit eingelöst oder aber „giriert", so wird von der Summe, auf die er lautet, der bis dort fällige Zinsbetrag abgezogen und dieser Abzug als „Rabatt" oder „Diskonto" bezeichnet. Die „diskontierte Summe" heißt auch „Barwert". Diese Art des Geldverkehres bildete sich schon um das 7. Jahrhundert in Italien und Frankreich aus, gelangte im 13. Jahrhundert nach Deutschland und fand zuerst in Venedig durch Errichtung einer Staatsgirobank staatliche Anerkennung. Bei der Berechnung der Verzinsungsdauer wird entweder der Kauftag oder Verfallstag von der Berechnung ausgeschlossen, die Monate werden alle zu 30 Tagen gerechnet und das Jahr zu 360 Tagen angenommen. Ersetzt man im Datum den Monatsnamen durch die Ordnungszahl des Monats im Jahre, so kann man die Zahl der Tage nach demselben Verfahren finden, das man bei der Subtraktion mehrnamiger Zahlen zu benützen pflegt. Für $j = \frac{t}{360}$ Tage geht dann die obige Formel über in $z = \frac{p \cdot j \cdot K}{100} = \frac{p \cdot t \cdot K}{36\,000}$. Ist mithin der Zinsfuß $p = 4\,^0/_0$, so erhalten wir die einfache Formel $z = \frac{t \cdot K}{9000}$.

Die **„Terminrechnung“** löst die Aufgabe, die Zeit zu bestimmen, wann mehrere an verschiedenen Tage fällige Zahlungen durch die Summe der nicht diskontierten Beträge getilgt werden kann, ohne daß weder der Geldgeber noch der Geldnehmer Schaden erleidet. Es seien K_1, K_2 und K_3 drei Kapitalien, die bzw. t_1, t_2 und t_3 Tage nach einem bestimmten Termine fällig sind und T sei die vom gleichen Zeitpunkt an berechnete Zahl der Tage, nach welchen die Schuld mit der Summe $K_1 + K_2 + K_3$ bezahlt werden kann. Dann muß bei gleichem Prozentsatz der Diskonto dieser Summe für den gesuchten Termin T gleich der Summe der Diskontbeträge der einzelnen Kapitalien sein. Aus $\frac{p \cdot T}{36000}(K_1 + K_2 + K_3)$ $= \frac{p}{36000} \cdot (t_1 \cdot K_1 + t_2 \cdot K_2 + t_3 \cdot K_3)$ folgt daher

$$T = \frac{t_1 \cdot K_1 + t_2 \cdot K_2 + t_3 \cdot K_3}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

Diese Aufgabe findet sich bereits im Rechenbuch des Luca Paciuolo († 1514 in Florenz), das die meisten Probleme über die Proportionen und Zinsesrechnung bereits in ähnlicher Form behandelt.

Aber nicht nur im Geldverkehr, sondern auch beim Bruchrechnen im allgemeinen bedient man sich oft der Prozentrechnung, besonders wenn es sich nur um angenäherte Wertangaben handelt. So kann man z. B. sagen, $^1/_3$ sind ungefähr $33\,^0/_0$ und deutet damit an, daß diese Zahl in Dezimalbruchform so viele Hundertstel enthält. Eine ähnliche Ausdrucksweise ist es auch, wenn man sagt, die Zahl der Einwohner einer Stadt hat sich in einem Jahr um $7\,^0/_0$ vermehrt.

Wenn diese Rechnungsform statt auf Hundertstel der Hauptgröße auf Tausendstel bezogen wird, so spricht man von Promille und bezeichnet dies mit $^0/_{00}$. Die Steigung einer Bahnlinie beträgt $2\,^0/_{00}$, heißt also auf 1000 m Länge entfällt eine Erhöhung um 2 m. $2\,^0/_{00} = 0.2\,^0/_0$.

Regeldetri und Kettensatz.

Unter „Regeldetri“ versteht man das mechanische Verfahren, um irgend eines von den vier Gliedern einer Proportion zu berechnen, wenn die drei übrigen bekannt sind. Da schon bei den ältesten Rechnungsformen vielfach proportionale Größen vorkommen, so lassen sich die Spuren dieser Rechnungsart bis in die frühesten Zeiten verfolgen. Die mangelhafte theoretische Grundlage brachte es aber mit sich, daß jede neue Fassung einer solchen Rechnung als ein neues

Problem behandelt wurde. In diesem Sinne arbeiteten unter andern der indische Mathematiker Brahmagupta im 6., der Araber Muhamed ibn Musa Alchwarizmi im 9., der Verfasser des „Liber abaci“, Leonardo von Pisa im 13. Jahrhundert, und Johannes Widmann von Eger führt in seinem 1489 erschienenen Rechenbuch sogar 28 verschiedene Lösungsfälle an. Allmählich drangen von Italien aus auch einfachere Rechnungsformen nach Deutschland vor und wurden hier unter dem Namen „Welsche Praktik“ bekannt. Für diese allerdings nicht systemisierte Loslösung von den altgewohnten Schulformen trat in Deutschland besonders Michael Stifel in Jena (1545) und Adam Riese von Annaberg (1550) ein. Wir erledigen alle einschlägigen Aufgaben auf Grund unseres viel allgemeineren Zahlbegriffes in einheitlicher Weise durch die „Auflösung von Gleichungen“. Die hier in Betracht kommende Form derselben beschränkt sich darauf, daß z. B. die Proportion $a:b=c:x$ durch die Bedingung für ihre Richtigkeit ersetzt wird: $a \cdot x = b \cdot c$, und daraus berechnen wir den Wert der Unbekannten x, welcher demnach $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

Eine wichtige Verallgemeinerung dieser Aufgabe stellt der sogenannte „Kettensatz“ dar. Auch dieser kommt z. B. im wesentlichen bereits bei Brahmagupta, bei Leonardo von Pisa und Widmann von Eger vor, nahm aber erst im 18. Jahrhundert die jetzige Gestalt an. Seine wahre Bedeutung und die mathematische Berechtigung dieses Rechnungsverfahrens ergibt sich erst aus folgenden Darlegungen.

Wenn man ein und dieselbe Größe g mit verschiedenen Einheiten mißt, so erhält man verschiedene Maßzahlen, und diese sind zu den gewählten Einheiten verkehrt proportional.

Wird die Größe g mit der Einheit a_1 gemessen, so sei ihre Maßzahl a und daher $g = a \cdot a_1$. Mit der Einheit b_1 gemessen erhalten wir eine Maßzal b, und es ist $g = b \cdot b_1 = a \cdot a_1$, mithin $a : b = b_1 : a_1$. Wenn wir z. B. dieselbe Größe mit einer zehnmal größeren Einheit messen, erhalten wir eine zehnmal kleinere Maßzahl. Bei praktischen Anwendungen kommt es aber oft vor, daß wir wohl die Maßzahlen a' und b derselben Größe g_1 in den Einheiten a_1 und b_1, aber für eine andere Größe g_2 die Maßzahlen b' und c in bezug auf die Einheiten b_1 und c_1 kennen, und die Maßzahlen c' und a seien uns nur von einer dritten Größe g_3 bekannt. Wie verhalten sich dann die Maßzahlen a und d' irgend einer in diesen Einheiten gemessenen Größe g_4, beziehungsweise diese Einheiten a_1 und d_1?

Aus der Gleichheit der Produkte:

$$g_1 = a' \cdot a_1 = b \cdot b_1$$
$$g_2 = b' \cdot b_1 = c \cdot c_1$$
$$g_3 = c' \cdot c_1 = a \cdot a_1$$

ergibt sich durch Multiplikation die Gleichung von $a' b' c' \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = b c a \cdot a_1 b_1 c_1$, und da $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1$ beiderseits als Faktor erscheint, so sind auch die Produkte der Maßzahlen gleich, also $a' b' c' = a b c$.

Schreibt man demnach, wie es beim „Kettensatz" üblich ist, die in den verschiedenen Einheiten gemessenen Maßzahlen beliebiger Größen so untereinander, daß immer in der unteren Zeile links dieselbe Einheit auftritt wie in der oberen rechts, bis schließlich dieselbe Einheit erscheint wie zu Beginn, so ist das Produkt der Maßzahlen links gleich dem Produkt der Maßzahlen rechts. Wenn uns eine dieser Maßzahlen, wie in der angewandten Regeldetri nicht bekannt ist, so können wir sie aus den übrigen berechnen. Es ist daher z. B. $x = \frac{a b c}{b' c'}$, falls die Maßzahl a' allein unbekannt war.

Die Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

Bei der Addition und Multiplikation zweier Zahlen handelt es sich darum, nach einem bekannten Verfahren eine eindeutig bestimmte neue Zahl abzuleiten. Bei der Ausführung einer Subtraktion oder Division suchen wir eine Zahl, die zu einer bekannten Zahl addiert, bzw. mit ihr multipliziert, ein vorgegebenes Resultat gibt. Im ersten Fall finden wir eine Zahl, die dem Ergebnis der eindeutig festgestellten Rechnung „gleich sein muß", weil diese damit definiert wird, im letzteren Fall wird uns eine Zahl angegeben, die dem Ergebnis gewisser Rechnungen „gleich sein soll".

Diese zwei sich gegenseitig ergänzenden Probleme lassen naturgemäße Erweiterung zu. Bezüglich des ersten Teiles geschah dies durch die Aufstellung des Begriffes der „ganzen Funktion einer unabhängig Veränderlichen". Jeder Wert der unabhängig Veränderlichen x führt durch ihre rechnerischen Verknüpfungen mit den in der Funktion vorkommenden unveränderlichen Zahlen, den Konstanten, zu einem eindeutig bestimmten Zahlenwert, dem „Funktionswert $y = f(x)$". Die Umkehrung dieses Verfahrens bildet den zweiten Teil der Erweiterung, indem wir fragen: Welchen Wert müssen wir der unabhängig Veränderlichen x einer bestimmten Funktion geben, um einen vorgegebenen Funktionswert zu erhalten?

„Der mathematische Ausdruck, aus dem wir ersehen, welchen Bedingungen die unabhängig Veränderliche einer Funktion genügen soll, bezeichnen wir als eine **Gleichung.**"

Die „unabhängig Veränderliche" einer Funktion wird dadurch zur „Unbekannten" der Gleichung, und deren Auflösung besteht

darin, daß wir aus den in ihr vorkommenden Zahlen einen Ausdruck ableiten, der für die Unbekannte in die Gleichung eingesetzt ihr Genüge leistet. „Soll“ $f(x) = 5x + 3 = 38$ sein, so „muß“ $x = (38 - 3):5 = 7$ gesetzt werden, weil nur $5 \cdot 7 + 3 = 38$ „ist“.

Der Wert einer unbekannten Zahl, welcher einer vorgelegten Bedingung genügen soll, wurde schon bei sehr alten Aufgaben als die „Wurzel“ derselben bezeichnet. Auch die Ausführung der Subtraktion und Division können wir als die Auflösung einer Gleichung auffassen. Diese beiden Operationen enthalten aber auch schon die beiden Grundformen der Lösung.

Soll $x + b = a$ sein, so setzen wir $x = a - b$, dann ist wirklich $(a - b) + b = a$, und soll $x \cdot b = a$ sein, so setzen wir $x = \frac{a}{b}$, dann ist wirklich $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

Dieses sogenannte „Hinüberschaffen“ der mit der Unbekannten verbundenen Zahl b auf die andere „Seite“ des Gleichheitszeichens bezeichneten die Araber mit den Worten „Al dschebr“. Dieser Ausdruck im Titel des von Muhammed ibn Musa Alchwarizmi verfaßten Werkes „Aldschebr w'almukabala“ gab Veranlassung zur Bildung des Wortes „Algebra“. Darunter verstand man im Mittelalter und zu Beginn der Neuzeit, in den romanischen Ländern vielfach auch noch jetzt, das Rechnen mit allgemeinen Zahlen, bzw. mit den sie darstellenden Buchstaben, also das Buchstabenrechnen. In der deutschen mathematischen Fachliteratur verwendet man dieses Wort fast ausschließlich nur mehr für die Theorie und Praxis der Auflösung von Gleichungen.

Die beiden oben angegebenen Grundformen für die Auflösung von Gleichungen lassen sich noch vereinfachen und geben so den Weg an, auf dem man systematisch zur Lösung gelangt. Setzen wir nämlich $a = 0$, so erhalten wir im ersten Fall $x + b = 0$ und daher $x = -b$, wobei b eine positive oder negative Zahl bedeuten kann. Im zweiten Fall folgt aus $x \cdot b = 0$, daß $x = 0$, wenn b von Null verschieden ist. Ist $b = 0$, so läßt sich der Wert von x nicht bestimmen.

Je nachdem die Funktion $f(x)$, die einen gegebenen Wert annehmen soll, vom ersten, zweiten oder allgemein vom n-ten Grade ist, unterscheidet man Gleichungen ersten, zweiten oder n-ten Grades. Die Gleichungen ersten Grades heißen auch „linear“, die zweiten Grades „quadratisch“, die vierten Grades „biquadratisch“. Gleichungen von der Form $a \cdot x^n - b = 0$, die also nur zwei Glieder enthalten, werden „binomische“ genannt. Gleichungen, die sich

nicht auf ganze oder gebrochene Funktionen der Unbekannten zurückführen lassen, heißen „transzendent".

Man gebraucht auch die Bezeichnung „identische Gleichung" für arithmetische Formeln, welche die Gleichwertigkeit zweier zum gleichen Resultat führenden Rechnungen ausdrücken, wie $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und die daher für alle Werte von a und b gelten. Im Gegensatz zu diesen nennt man die nur für einzelne Werte der Unbekannten gültigen Gleichungen „Bestimmungsgleichungen".

Ein Haupthindernis für die Entwicklung der Algebra war wie bei der Lehre von den Proportionen der Mangel eines entsprechend allgemeinen Zahlbegriffes. Wie dort, war man auch hier lange Zeit bestrebt, für jede Aufgabe eigene Umwege aufzusuchen, um die gebrochenen und noch mehr, um die negativen Zahlen zu vermeiden. Dieser Umstand brachte es mit sich, daß sich zuerst eine Unzahl verschiedener Lösungsmethoden entwickelte, die jede für sich ein sehr beschränktes Anwendungsgebiet hatten und einheitliche Gesichtspunkte eher verdrängten, statt sie hervorzuheben.

Um die Gleichungen ersten Grades zu behandeln, genügt es, den Fall $f(x) = ax + b = 0$ zu erledigen, da sich alle andern Fälle auf diesen zurückführen lassen. Betrachten wir hier zunächst das Produkt $ax = z$ als Unbekannte, so ergibt sich die im Gebiete der reellen Zahlen immer durchführbare Lösung aus $ax + b = z + b = 0$; es ist also $z = -b$, und dann folgt aus $z = ax = -b$ der gesuchte Wert von $x = -\frac{b}{a}$. Die Richtigkeit der Lösung ergibt sich durch die „Substitution" $a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$.

Zu diesem Resultat gelangen wir auch, wenn wir sagen: Im Produkte $a\left(x + \frac{b}{a}\right) = ax + b = 0$ kann a nicht Null sein, weil sonst die Funktion $f(x) = ax + b$ nicht vom ersten Grade wäre; daher muß der zweite Faktor $x + \frac{b}{a} = 0$ und $x = -\frac{b}{a}$ sein.

Hat eine Gleichung ersten Grades nicht die „auf Null reduzierte" Form, so müssen wir uns fragen, ob sich wohl der Lösungswert nicht ändert, wenn wir mit einer Gleichung gewisse Veränderungen vornehmen, um sie auf diese Form zu bringen, wenn wir sie also zu diesem Zwecke „transformieren".

Leiten wir aus der Gleichung $ax + b = 0$ eine neue Gleichung in der Weise ab, daß wir auf beiden Seiten der Gleichung einen positiven oder negativen Summanden hinzufügen, so ändert sich der

Wert der Lösung nicht, denn aus $ax+b+c=c$ folgt $x=[c-(b+c)]:a$ $=-\frac{b}{a}$, mithin dieselbe Lösung wie aus $ax+b=0$, d. h. die Lösung hat sich deshalb nicht geändert. Daraus folgt:

Man darf zu beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren, ohne daß sich der Wert der Lösung ändert.

Leiten wir aus der Gleichung $ax+b=0$ eine neue Gleichung in der Weise ab, daß wir alle Glieder derselben mit einer endlichen und von x nicht abhängigen Zahl, also mit einer konstanten und von Null verschiedenen Zahl c multiplizieren, so hat letztere den nämlichen Lösungswert wie die ursprüngliche. Aus $acx+bc=0$ folgt $x=-\frac{bc}{ac}=-\frac{b}{a}$. Da c auch eine gebrochene Zahl $\left(c=\frac{1}{d}\right)$ darstellen kann und daher auch $\frac{ax}{c}+\frac{b}{c}=0$ dieselbe Lösung hat, so folgt hieraus der Satz:

Man darf alle Glieder einer Gleichung mit derselben unveränderlichen Zahl multiplizieren oder durch dieselbe dividieren, ohne daß sich der Wert der Lösung ändert.

Jede Gleichung, welche durch Multiplikation mit der Unbekannten x oder mit einer andern Funktion ersten Grades von x, also z. B. mit $cx+d$ die Form $ax+b=0$ annimmt, hat wie diese die Lösung $x=-\frac{b}{a}$, wenn nicht auch $cx+d$ für diesen Wert von x gleich Null ist.

Im ersteren Fall war der ursprüngliche Ausdruck $\frac{ax+b}{x}$ und im letzteren Fall $\frac{ax+b}{cx+d}$, und diese sind nur dann gleich Null wenn der Zähler Null ist. Da wir uns hier nur mit endlichen Lösungswerten befassen, so ist die Möglichkeit ausgeschlossen, daß der Wert des Bruches kleiner als eine beliebig kleine Zahl werde, also gleich Null sei, weil der Nenner unendlich groß ist. Wenn wir aber durch die Multiplikation mit x oder mit einem Ausdruck von der Form $cx+d$ aus der Gleichung $ax+b=0$ die neue Gleichung $x\cdot(ax+b)=0$ oder $(cx+d)(ax+b)=0$ ableiten, so wird erstere auch durch den Wert $x=0$ befriedigt und letztere hat nebst der Lösung $x=-\frac{b}{a}$ auch noch die Wurzel $x=-\frac{d}{c}$, welche die ursprüngliche Gleichung nicht hatte. Wir dürfen daher eine Gleichung mit der Unbekannten oder mit einer linearen Funktion derselben

nur dann multiplizieren, wenn die Unbekannte im Nenner vorkommt und durch eine solche Multiplikation aus demselben verschwindet; ohne daß deshalb der Zähler den ersten Grad übersteigt.

Hat eine vorgelegte Gleichung nicht schon die Form $ax + b = 0$, so pflegt man sie durch die obenerwähnten „Transformationen" auf diese Form zu bringen.

Um die sog. Textgleichungen aufzulösen, muß man zuerst die in Worten ausgedrückten arithmetischen Beziehungen in arithmetische Zeichen übertragen. Es empfiehlt sich in solchen Fällen, die aus der Lösung sich ergebenden Wurzelwerte auf ihre Übereinstimmung mit den gestellten Forderungen zu prüfen.

Eine sehr wichtige Anwendung der Gleichungen ist die Berechnung der Maxima und Minima algebraisch dargestellter Funktionen. Wir wollen uns hier auf Funktionen von der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschränken, deren Differentialquotient $f'(x) = 2ax + b$ ist. $f(x)$ nimmt seinen größten oder kleinsten Wert an, wenn $2ax + b = 0$, also $x = -\frac{b}{2a}$. Für $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ ist $f'(x) = 6x - 6$ und aus $6x - 6 = 0$ folgt, daß dann $x = 1$ jener Wert ist, für den $f(1) = 3 - 6 + 5 = 2$ und damit seinen niedersten Wert annimmt. Alle andern Funktionswerte, wie z. B. $f(0) = 5$ sind größer als $f(1) = 2$. Da jede Gleichung ersten Grades eine einzige Wurzel besitzt, so kann eine Funktion von der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ nur für einen einzigen Wert von x entweder ein Maximum oder ein Minimum, also niemals nebst einem Maximum noch ein Minimum haben.

Die Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

Betrachten wir die für alle Gleichungen ersten Grades charakteristische Form $ax + b = 0$ und den Ausdruck für ihre Wurzel $x = -\frac{b}{a}$, so sehen wir, daß jede solche Gleichung eine Wurzel hat und daß sie nur **eine** Wurzel haben kann, weil der Ausdruck für dieselbe eindeutig ist. Ist die nämliche Zahl zugleich Wurzel einer zweiten Gleichung ersten Grades $cx + d = 0$ und daher $x = -\frac{d}{c} = -\frac{b}{a}$, so besteht zwischen den Konstanten beider Gleichungen die Proportion: $b : a = d : c$ oder $c : a = d : b = k$, mithin ist $c = ka$ und $d = kb$. Es

ist demnach $cx + d = kax + kb = k(ax + b) = 0$. „Wenn eine zweite Gleichung ersten Grades von der Form $ax + b = 0$ denselben Wurzelwert hat, so gibt es eine Zahl k, welche mit der früheren Gleichung multipliziert die zweite Gleichung gibt."

Wir haben bisher nur solche Funktionen betrachtet, die eine einzige unabhängig Veränderliche enthalten, von deren Größe der Funktionswert abhängt. Der Ausdruck $ax + by + c$ nimmt aber nicht nur dann immer neue Werte an, wenn wir für x verschiedene Zahlen einsetzen, während die übrigen Zahlen gleichbleiben, sondern er ändert sich auch dann, wenn wir für y größere oder kleinere Zahlen einsetzen, aber das x wie a und b konstant sein lassen. Einen solchen Ausdruck nennen wir eine **„Funktion von zwei unabhängig Veränderlichen"** und drücken dies mit der Bezeichnung $f(x, y) = ax + by + c$ aus. Weil die beiden unabhängig Veränderlichen x und y nur in der ersten Potenz vorkommen und in keinem Gliede das Produkt derselben auftritt, weil also dieser Ausdruck auch dann noch eine Funktion ersten Grades bleibt, wenn wir beide Veränderlichen durch dieselbe ersetzen, so bezeichnen wir sie ferner als eine Funktion **ersten Grades.** Eine Funktion von der Form: $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$ stellt eine **„Funktion ersten Grades mit drei unabhängig Veränderlichen"** vor, wenn wir unter x, y und z beliebig veränderliche und unter a, b, c und d unveränderliche Zahlen verstehen. In ähnlicher Weise lassen sich Funktionen mit beliebig vielen Veränderlichen herstellen, und man sagt, sie seien vom n-ten Grad, wenn wir daraus eine Funktion n-ten Grades einer einzigen Funktion erhalten, falls alle Veränderlichen durch dieselbe z. B. durch die erste ersetzt werden.

Soll eine Funktion mit mehreren unabhängig Veränderlichen einen bestimmten Wert annehmen, so erhalten wir eine **„Gleichung mit mehreren Unbekannten"**, und jene Werte der Veränderlichen, welche dieser Forderung entsprechen, heißen wieder „Wurzeln" der Gleichung. Auch in diesem Fall genügt es, der Funktion den Wert Null vorzuschreiben, um eine allgemein verwendbare Lösungsform zu finden. Soll die Funktion $f(x, y) = ax + by + c = 0$ sein, so läßt sich für jeden Wert von y ein Wert von x finden, der diese Bedingung erfüllt, und ebenso für jeden Wert von x ein entsprechender Wert von y. Es ist nämlich $x = -\frac{by + c}{a}$ und $y = -\frac{ax + c}{b}$.
So lange die eine Unbekannte unbestimmt bleibt, ist es also auch die andere. Eine einzige Gleichung mit zwei oder mehreren Unbekannten läßt demnach keine bestimmte, eindeutige Lösung zu. Wenn wir aber die Forderung aufstellen, daß dieselben Wurzelwerte

beider Unbekannten zwei Gleichungen genügen sollen, so gibt es unter bestimmten Bedingungen nur einen Wert von x und einen Wert von y, die als Wurzeln beider Gleichungen aufgefaßt werden können.

Es sei $f_1(x, y) = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $f_2(x, y) = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$. Berechnen wir dieselbe Unbekannte aus beiden Gleichungen und sollen dieselben den gleichen Wert darstellen, so ergibt sich hieraus die Gleichung $x = -\frac{b_1 y + c_1}{a_1} = -\frac{b_2 y + c_2}{a_2}$. Diese ist ersten Grades, hat nur die Unbekannte y und daher auch einen einzigen Wurzelwert; denn aus $a_2 b_1 y + a_2 c_1 = a_1 b_2 y + a_1 c_2$ folgt $(a_2 b_1 - a_1 b_2) y + a_2 c_1 - a_1 c_2 = 0$ und hieraus

$$y = -\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Ebenso erhalten wir auch eine Gleichung ersten Grades, die nur die Unbekannte x enthält, falls wir die Forderung aufstellen, daß die aus beiden Gleichungen berechneten Werte von y einander gleich sein sollen und finden dann $y = -\frac{a_1 x + c_1}{b_1} = -\frac{a_2 x + c_2}{b_2}$ und endlich $x = -\frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_1 b_2}$.

Den im Nenner beider Lösungsformen auftretenden Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1 = D$ bezeichnet man nach dem Gebrauch des hervorragenden französischen Mathematikers Cauchy († 1857) als die **„Determinante"** dieses Gleichungssystems, weil deren Wert darüber „entscheidet", ob dasselbe für x und y eine bestimmte und endliche Lösung zuläßt oder nicht. Die für x und y gefundenen Ausdrücke haben nämlich immer einen bestimmten und endlichen Wert, wenn D nicht Null ist. Ist dagegen $D = 0$ und der Zähler $b_1 c_2 - b_2 c_1$ oder $a_2 c_1 - a_1 c_2$ ebenfalls gleich Null, so folgt aus $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = k$ und aus $b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$, daß auch $c_2 : c_1 = b_2 : b_1 = k$. Es ist demnach $a_2 = a_1 k$, $b_2 = b_1 k$ und $c_2 = c_1 k$, mithin $a_2 x + b_2 y + c_2 = a_1 k x + b_1 k y + c_1 k = k(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0$, also die zweite Gleichung aus der ersten nur durch Multiplikation mit k hervorgegangen oder, wie man zu sagen pflegt, eine „Folge" derselben; wir haben dann für beide Unbekannte nur eine einzige Gleichung, die also zu deren Bestimmung nicht hinreicht. Wenn dagegen $D = 0$, während z. B. $b_1 c_2 - b_2 c_1$ nicht gleich Null ist, dann gibt es für dieses Gleichungssystem keine bestimmten und endlichen Lösungen, weil in diesem Falle $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $a_2 x + b_2 y + c_2 = a_1 k x + b_1 k y + c_2 = k(a_1 x + b_1 y) + c_2 = -k c_1 + c_2 = 0$, also $c_2 = \frac{b_2}{b_1} c_1$ wäre, was mit der obigen Annahme $b_1 c_2 - b_2 c_1 \gtrless 0$ nicht

vereinbar ist. Beide Gleichungen würden also widersprechende Forderungen enthalten. Wir fassen alle diese Fälle mit dem Satze zusammen:

Zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ besitzen für x und y je eine bestimmte und endliche Lösung, wenn die Determinante $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$ nicht Null ist. Wenn aber $D = 0$ und $a_2 c_1 - a_1 c_2 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$, so ist das Gleichungssystem unbestimmt, weil es nur eine Gleichung mit zwei Unbekannten darstellt. Wenn endlich $D = 0$ und $a_2 c_1 - a_1 c_2$ oder $b_1 c_2 - b_2 c_1$ von Null verschieden ist, so gibt es keine bestimmten und endlichen Lösungswerte, weil die beiden Gleichungen nicht vereinbar sind.

Wenn $c_1 = c_2 = 0$ und die Gleichungen mithin kein von Null verschiedenes Glied enthalten, in dem weder x noch y als Faktor vorkommt, so bezeichnet man sie als „homogen". Gleichungen höheren Grades heißen „homogen", wenn alle Glieder dieselbe Potenz der Unbekannten als Faktor enthalten, falls sämtliche Unbekannte durch dieselbe Größe ersetzt werden.

Die **„homogenen" Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten** $a_1 x + b_1 y = 0$ und $a_2 x + b_2 y = 0$ haben das gemeinsame Lösungspaar $x = 0$ und $y = 0$. Wenn wir aber beide Gleichungen durch dieselbe Unbekannte, z. B. durch y dividieren und $\frac{x}{y} = z$ als neue Unbekannte auffassen, so erhalten wir für dieselbe zwei Gleichungen ersten Grades, die mithin nur dann eine gemeinsame Lösung zulassen, wenn die eine aus der andern durch Multiplikation mit einer Konstanten hervorgegangen ist. Daraus folgt:

Das Verhältnis der beiden Unbekannten $\frac{x}{y} = z$ zweier homogener Gleichungen ersten Grades hat nur dann einen bestimmten endlichen Wert, wenn $D = 0$.

Um für zwei Gleichungen die gemeinsamen Lösungswerte von x und y zu finden, haben wir zuerst aus beiden Gleichungen dieselbe Unbekannte, nämlich x berechnet und die dafür erhaltenen Ausdrücke einander gleich gesetzt. Der große englische Mathematiker und Physiker Isaak Newton, der diese Lösungsmethode in seinen 1685 gehaltenen Vorlesungen zuerst anwandte, bezeichnet die dabei vorgenommene Ausscheidung einer Unbekannten als „exterminieren", während man jetzt dafür den vom deutschen Mathematiker Leonhard Euler stammenden Ausdruck „eliminieren" gebraucht. Diese Methode wird **Komparationsmethode** genannt, weil dabei zwei für dieselbe Unbekannte geltende Ausdrücke miteinander verglichen, und **Kombinationsmethode**, weil sie miteinander verknüpft werden.

Von Newton stammt auch die **Substitutionsmethode,** die darin besteht, daß man irgend eine Unbekannte aus der einen Gleichung berechnet und den für sie erhaltenen Ausdruck in die zweite Gleichung einsetzt. Dieser Lösungsweg läßt auch deutlich erkennen, welche Beziehung zwischen der Zahl der Gleichungen und der Zahl der in ihnen vorkommenden Unbekannten bestehen muß, wenn ein Gleichungssystem auflösbar, d. h. weder unbestimmt noch widersprechend sein soll.

Drücken wir mit Hilfe der ersten von mehreren Gleichungen eine Unbekannte als Funktion der übrigen Unbekannten aus und setzen wir diesen Ausdruck in alle übrigen Gleichungen ein, so erhalten wir ein neues Gleichungssystem, bei dem sowohl die Gleichungen, wie auch die Unbekannten um eine abgenommen haben. Fahren wir so fort, so bleibt uns für die letzte Unbekannte eine einzige Gleichung übrig, wenn die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten war. Dann ergibt sich für diese und zugleich auch für jede andere Unbekannte ein einziger Lösungswert, wenn alle Gleichungen vom ersten Grade sind. Enthält die letzte Gleichung noch zwei oder mehrere Unbekannte, so ist nicht nur diese, sondern auch das ganze Gleichungssystem unbestimmt. Wenn wir endlich bei der letzten Substitution zwei Gleichungen mit einer und derselben Unbekannten erhalten, so muß eine von diesen aus der andern durch Multiplikation mit einer Konstanten hervorgegangen sein, wenn sich die Gleichungen nicht widersprechen und ein gemeinsames Lösungssystem ausschließen, wie wir zu Beginn dieses Abschnittes gezeigt haben.

Noch vor diesen beiden Methoden hat der Franzose Johannes Buteo eine andere Methode angewendet, die sich durch ihre regelmäßigen Formen auszeichnet, nämlich die **Methode der gleichen Koeffizienten** oder **Additionsmethode.** Wir multiplizieren jede Gleichung mit einer solchen Konstanten, daß die Unbekannte x „gleiche Koeffizienten", aber entgegengesetztes Vorzeichen erhält. Wenn wir dann beide Gleichungen „addieren", so gelangen wir zu einer neuen Gleichung, welche nur mehr die Unbekannte y enthält. Das x ist damit eliminiert. Die Zahlen, mit denen die Gleichungen multipliziert werden, pflegt man rechts neben den vertikalen Strich zu schreiben. x finden wir durch Eliminierung von y, wenn wir beide Gleichungen mit den Zahlen rechts vom zweiten Strich multiplizieren und dann addieren.

$$\begin{array}{l|c|c} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 & a_2 & -b_2 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 & -a_1 & b_1 \end{array}$$

$$0 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) y + (a_2 c_1 - a_1 c_2) = 0, \text{ also } y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) x + 0 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0, \text{ also } x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Den Ausdruck für x können wir aber auch durch folgende Überlegung unmittelbar aus dem Ausdruck für y ableiten. Beide Gleichungen bleiben arithmetisch dieselben, wenn wir jedes y durch x, aber zugleich auch die Buchstaben b durch a ersetzen, denn damit haben wir nur zwei Summanden vertauscht. Daher muß sich aus der für y gefundenen Lösung die für x ergeben, wenn in ihr b durch a und a durch b ersetzt wird. $y = \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ geht dann in der Tat in den für x gefundenen Ausdruck

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_1 a_2 - b_2 a_1} = \frac{b_1 a_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ über.}$$

Theoretisch führt jede dieser drei Methoden in jedem Falle zum Ziele, aber nicht jede gleich schnell. Die Wahl der zweckmäßigsten Methode ist im allgemeinen Sache der Übung, aber bei Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten ist meistens die Methode der gleichen Koeffizienten empfehlenswert, die Komparationsmethode, wenn sich dieselbe Unbekannte aus beiden Gleichungen sehr leicht, d. h. ohne Zwischenrechnungen berechnen läßt, und die Substitutionsmethode, wenn die Berechnung einer Unbekannten aus einer Gleichung ein sehr einfaches Resultat liefert, das bei der Substitution in die zweite Gleichung dieselbe nicht wesentlich erweitert.

Rechnungsoperationen dritter Stufe.

Die Addition und ihre Umkehrung, die Subtraktion, pflegt man als Rechnungsoperationen erster Stufe zu bezeichnen, weil sich die Bildung des Produktes aus ihr in der Weise ableiten läßt, daß man die Zahl der Einheiten im Produkt als „Summe“ gleicher Einheitsgruppen auffassen kann, obwohl der Begriff des Produktes so, wie wir ihn in dem Abschnitt über die Multiplikation entwickelt haben, von dem der Summe ganz unabhängig ist. Aus demselben Grunde nennt man die Multiplikation und Division Operationen zweiter Stufe.

Summe und Produkt sind kommutativ. Wir gelangen also zu keiner anderen Operation, wenn wir statt des ersten Summanden oder Faktors den zweiten aus der Summe, bzw. aus dem Produkte berechnen. Anders verhält es sich bei der Operation dritter Stufe,

beim Potenzieren. Es ist $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ und $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$. Es ist demnach 5^3 nicht gleich 3^5 und wir können daher auch nicht allgemein $b^l = l^b$ setzen. Wenn eine von den drei Zahlen b, l und p im Ausdruck $b^l = p$ unbekannt ist, so ergeben sich drei verschiedene Operationen dritter Stufe $b^l = x$, $x^l = p$ und $b^x = p$. Im ersten von diesen drei Fällen wird aus der **Grundzahl** oder **Basis** b und aus dem **Exponenten** l der Wert der **Potenz** p berechnet; darin besteht das „**Potenzieren**". Im zweiten Falle wird aus der Potenz p und dem Exponenten l die Basis oder **Wurzel** b bestimmt; dies geschieht beim „**Radizieren**", und mit der Darstellung des Exponenten l aus der Potenz p und der Grundzahl b befaßt sich das „**Logarithmieren**". Es ist demnach

$$125 = 5^3,\quad 5 = \sqrt[3]{125} \quad \text{und} \quad 3 = {}^5\text{Log}\, 125.$$

Das Potenzieren.

Wenn a, b, l und m ganze Zahlen bedeuten, so ergibt sich die Bedeutung von $p = a^l$ und $q = b^m$ aus $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a$, oder allgemein aus $a^{m+1} = a^m \cdot a$. Um mit Potenzen rechnen zu können, müssen wir uns wieder fragen, welche Operationen an den Grundzahlen und Exponenten auszuführen sind, wenn wir die Potenzen zueinander addieren, miteinander multiplizieren oder zu einer bestimmten Potenz erheben wollen. Gibt es zunächst gewisse Rechnungsoperationen, die wir mit a, b, l und m vornehmen können, um $p + q = a^l + b^m$ zu erhalten, ohne zuerst a^l und b^m auszurechnen und dann erst diese beiden in Ziffern ausgedrückten Zahlen zu addieren? Wollten wir einen darauf bezüglichen Satz aufstellen, so müßten wir ihn „allgemein" beweisen, d. h. wir müßten zeigen, daß er für alle Werte von a, b, l und m gilt. Um dagegen die Unrichtigkeit eines Satzes zu zeigen, genügt es, einen einzigen Fall anzuführen, in dem der Satz nicht zutrifft. Wenn also jemand vermuten würde, daß $p + q = a^l + b^m = (a + b)^{l+m}$, daß wir also die Summe zweier Potenzen erhalten, wenn wir die Summe der Grundzahlen mit der Summe der Exponenten potenzieren, so genügt es, auf den Fall zu verweisen, daß $2^3 + 3^2 = 17$, aber $(2+3)^{2+3} = 5^5 = 3125$. Ein Additionsgesetz von dieser Form gibt es also nicht.

Auch Sätze von der Form $a^m + b^m = (a + b)^m$ und $a^m + a^n = a^{m+n}$ lassen sich so als nicht allgemein gültig erweisen. Für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Grundzahl oder gleichem Exponenten bestehen aber folgende Sätze:

Potenzen mit gleicher Grundzahl werden miteinander multipliziert, indem man die gemeinsame Grundzahl mit der Summe

der Exponenten potenziert. Wenn $p = b^l$ und $q = b^m$, so ist $p \cdot q = b^l \cdot b^m = b^{l+m}$.

Die Formel $b^l \cdot b^m = b^{l+m}$ ist für $l = m = 2$ richtig, weil $b^2 \cdot b^2 = b^{2+2} = b^4$, und sie gilt auch für alle höheren Werte von l und m, denn $b^{l+1} \cdot b^m = b^l \cdot b \cdot b^m = b^l \cdot b^m \cdot b = b^{l+m+1} = b^{(l+1)+m}$ und $b^{l+1} \cdot b^{m+1} = b^{(l+1)+(m+1)}$.

Diese in der Mathematik vielfach verwertete Beweisform nennt man den **„Schluß von n auf $n+1$"**. Gilt nämlich ein Satz für einen bestimmten Wert von n, so gilt er auch für alle anderen ganzzahligen Werte und ist somit „allgemein" bewiesen.

Der eben bewiesene Satz kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden:

Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summand potenziert und die so erhaltenen Potenzen miteinander multipliziert.

Auf demselben Wege läßt sich auch der folgende Satz beweisen:

Potenzen mit gleichem Exponent werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponent potenziert. Wenn $p = a^l$ und $q = b^l$, so ist $p \cdot q = a^l \cdot b^l = (a \cdot b)^l$.

Der Satz ist für $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b = (a \cdot b)^2$ richtig und gilt auch für alle höheren Werte als $l = 2$, denn $a^{l+1} \cdot b^{l+1} = a^l \cdot b^l \cdot a \cdot b = (a \cdot b)^l \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^{l+1}$.

Wir können diesen Satz auch in der Form aussprechen:

Ein Produkt wird mit einer ganzen Zahl potenziert, indem man jeden Faktor mit derselben potenziert und die so erhaltenen Potenzen miteinander multipliziert.

Aus diesen beiden Sätzen ergeben sich zwei analoge Sätze für die Division:

Potenzen mit gleicher Grundzahl werden durcheinander dividiert, indem man die gemeinsame Grundzahl mit der Differenz der Exponenten potenziert. $p : q = b^l : b^m = b^{l-m}$.

Wenn nämlich $p : q = b^{l-m}$, so ist $(p : q) \cdot q = b^{l-m} \cdot b^m = b^{(l-m)+m} = b^l = p$.

Daher besteht auch der Satz:

Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man sie mit dem Minuend und mit dem Subtrahend potenziert und die erstere Potenz durch die letztere dividiert.

Potenzen mit gleichem Exponenten werden durcheinander dividiert, indem man den Quotient der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponent potenziert. $p : q = a^l : b^l = (a : b)^l$.

$p:q=(a:b)^l$, weil $(p:q)\cdot q=(a:b)^l\cdot b^l=[(a:b)\cdot b]^l=a^l=p$.
Mit andern Worten:

Ein Quotient wird mit einer ganzen Zahl potenziert, indem man den Dividend und Divisor mit derselben potenziert und die erstere Potenz durch die letztere dividiert.

Wie die allgemeine Anwendung der Subtraktion zur Aufstellung der negativen ganzen Zahlen geführt hat, so gelangen wir auch zu einer Erweiterung des Potenzbegriffes, wenn wir nicht nur das Produkt gleicher Faktoren als Potenz auffassen, sondern auch jeden Quotienten zweier solcher Produkte. Ohne diese Auffassung hat a^1 keinen Sinn, denn erst $a^2=a\cdot a$ stellt ein Produkt zweier gleicher Faktoren dar. Wohl aber ergibt sich aus $a^1=a^{3-2}=a^3:a^2=a$, daß $a^1=a$, daß $a^0=a^{2-2}=a^2:a^2=1$, daß $a^{-1}=a^{2-3}=a^2:a^3=1:a$ und daß allgemein $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, denn $a^{-1}=1:a$ und $a^{-(b+1)}=a^{-l-1}$ $=a^{-l}\cdot a^{-1}=\frac{1}{a^l}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^l\cdot a}=\frac{1}{a^{l+1}}$.

Jede Potenz mit negativem ganzzahligem Exponent ist gleich dem reziproken Werte derselben Potenz mit dem gleichen positiven Exponenten.

Die oben angeführten Sätze über die Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Grundzahl und gleichen Exponenten gelten demnach auch für Potenzen mit negativen Exponenten, weil wir sie durch den „Schluß von n auf $n+1$“ bewiesen haben, durch den wir vorwärtsschreitend zu jedem positiven ganzzahligen Wert und rückwärtsschreitend zu jedem negativen ganzzahligen Wert des Exponenten gelangen.

Eine andere Erweiterung des Potenzbegriffes erhalten wir dadurch, daß wir nicht nur ganze, sondern auch gebrochene Zahlen als Basis der Potenz verwenden. Die oben angeführten Sätze gelten mithin auch für alle rationalen Zahlen, die sich ja als Quotienten ganzer Zahlen darstellen und als solche mit positiven und negativen ganzen Zahlen potenzieren, mit anderen Potenzen derselben Basis multiplizieren oder durch solche dividieren und endlich mit der gleichen Potenz einer andern Basis durch Multiplikation oder Division verknüpfen lassen.

Eine Potenz wird mit einer ganzen Zahl potenziert, indem man ihre Grundzahl mit dem Produkte des früheren und des neuen Exponenten potenziert. $p^m=(b^l)^m=b^{lm}$.

$(b^2)^2=b^2\cdot b^2=b^4$, also ist dieser Satz für $l=m=2$ richtig. Es ist aber auch $(b^{l+1})^m=(b^l\cdot b)^m=b^{lm}\cdot b^m=b^{lm+m}$ und $(b^{l+1})^{m+1}$ $=(b^{l+1})^m\cdot b^{l+1}=b^{ml+m}\cdot b^{l+1}=b^{ml+m+l+1}=b^{(l+1)(m+1)}$.

Daher besteht auch der sowohl für positive wie für negative Exponenten gültige Satz:

Eine Zahl wird mit dem Produkte zweier ganzzahliger Faktoren potenziert, indem man sie zuerst mit dem einen und das Resultat mit dem zweiten Faktor potenziert.

Wir haben oben darauf hingewiesen, daß es keine distributive Formel für die Berechnung der Potenz einer Summe gibt. Das ist deshalb ausgeschlossen, weil das Quadrat und der Kubus einer Summe nebst den Quadraten und Kuben der Summanden auch noch andere Glieder enthält. Auf der gesetzmäßigen Bildung dieser Ausdrücke beruht das Quadrieren und Kubieren dekadischer Zahlen. Durch Ausführung der entsprechenden Multiplikationen erhalten wir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca),$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Beim Quadrieren dekadischer Zahlen bedient man sich mit Vorteil auch der Formel: $(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$ und schreibt dann jedes folgende Produkt um zwei Stellen weiter rechts $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + [2(a+b)+c]c$ usw.

Das Quadrat eines vollständigen Dezimalbruches hat doppelt so viele Dezimalstellen als die Grundzahl, weil $(a:10^n)^2 = a^2:10^{2n}$.

Beim Quadrieren unvollständiger Dezimalbrüche verwendet man das abgekürzte Multiplikationsverfahren und schreibt dabei die Ziffern des Multiplikators in verkehrter Reihenfolge so unter den Multiplikand, daß sich beide Ziffernreihen gegenseitig decken. Die niederste so erhaltene Stelle hat denselben Stellenwert wie jene Stelle im Multiplikand, unter welcher die Einer des Multiplikators stehen.

Für den Kubus eines Binoms erhalten wir durch Multiplikation des Quadrates:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3(a^2b + b^2a)$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc.$$

Beim Kubieren dekadischer Zahlen wendet man die Formel an: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, wobei dem nächstniedrigeren Stellenwerte entsprechende Produkte immer um eine Stelle weiter rechts geschrieben werden. Für mehr als zweistellige Zahlen wendet man dieses Verfahren wiederholt an.

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 \cdot c + 3(a+b)c^2 + c^3.$$

Der Kubus vollständiger Dezimalbrüche hat dreimal so viele Dezimalstellen als die Grundzahl, denn $(a:10^n)^3 = a^3:10^{3n}$.

Der Kubus unvollständiger Dezimalbrüche wird mit Hilfe des abgekürzten Multiplikationsverfahrens berechnet.

Das Radizieren.

Der dem deutschen Worte „Wurzel" entsprechende Ausdruck wird schon bei arabischen, wie auch bei indischen Mathematikern in dem Sinne verwendet, daß sie damit die Lösung einer Gleichung andeuten, und ging dann in die lateinische Fachliteratur über, wobei man allerdings meist die Lösungen quadratischer Gleichungen, und zwar die Auflösung der Gleichung $x^2 = a$ im Auge hatte. Wenn es sich darum handelte, aus einer in Ziffern dargestellten Zahl diese „Quadratwurzel" zu ziehen, so wurde dies durch ein vorgesetztes *R.* als Abkürzung für „Radix" angedeutet, und über die Ziffernreihe, auf welche sich die Operation bezog, machte man einen Strich, der denselben Zweck erfüllte, wie unsere Klammern. Aus der Verbindung des Punktes bei *R.* und diesem Strich ging das jetzt allgemein übliche Wurzelzeichen hervor und das *R* blieb einfach weg. $\sqrt{a} = x$ war demnach gleichbedeutend mit $x^2 = a$. Die uns geläufige Anschreibeweise des Exponenten kam sowohl bei den Potenzen wie auch bei den Wurzeln erst spät in Gebrauch, bei den Potenzen durch den französischen Mathematiker Descartes (1637), bei den Wurzeln durch den Franzosen Rolle (1690) und durch den Oxforder Mathematiker Wallis (1693). An diese Entstehung des Wurzelzeichens erinnert noch der Umstand, daß man nur bei der Quadratwurzel den Exponenten 2 nicht anschreibt. Die Zahl, deren Wurzel berechnet werden soll, heißt Radikand.

Wir bezeichnen mit $b = \sqrt[l]{p}$ eine Zahl, welche zur l-ten Potenz erhoben p gibt, und nennen dieselbe die **„absolute Wurzel"**, wenn es sich nur um die Bestimmung einer positiven Zahl handelt, deren l-te Potenz dem absoluten Wert von p gleich ist. Wenn $b = 1$, so ist auch $b^2 = b^3 = b^1 = b^n = 1$. Wenn aber $b < 1$, so folgt aus der Multiplikation dieser Ungleichung mit $b^n = b^n$, daß $b^{n+1} < b^n$ und aus $b > 1$ und $b^n = b^n$ folgt ebenso $b^{n+1} > b^n$. Verschiedene Potenzen derselben Grundzahl sind also nur dann gleich, wenn die Grundzahl gleich 1 ist. Wenn ferner $a > b > 1$, so ist auch $a^n > b^n$ und falls $0 < a < b < 1$, so ist $a^n < b^n$. Zwei absolute Wurzeln mit demselben Wurzelexponent können mithin nur dann gleiche Radikanden haben, wenn sie denselben absoluten Wert besitzen. Um die Gleichheit zweier Wurzelausdrücke nachzuweisen, müssen wir also zeigen, daß

dieselben mit der nämlichen Zahl potenziert einander gleiche Potenzen ergeben. Auf diesem Wege lassen sich folgende Sätze nachweisen:

Zwei Wurzeln mit demselben Wurzelexponent werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Radikanden mit dem gemeinsamen Wurzelexponent radiziert. $\sqrt[l]{p} \cdot \sqrt[l]{q} = \sqrt[l]{p \cdot q}$.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich daraus, daß wir beide Male denselben Ausdruck erhalten, ob wir den Ausdruck $\sqrt[l]{p} \cdot \sqrt[l]{q}$ oder $\sqrt[l]{p \cdot q}$ mit l potenzieren, denn es ist $\left(\sqrt[l]{p} \cdot \sqrt[l]{q}\right)^l = \left(\sqrt[l]{p}\right)^l \cdot \left(\sqrt[l]{q}\right)^l = p \cdot q$ und auch $\left(\sqrt[l]{p \cdot q}\right)^l = p \cdot q$. Wenn man diesen Ausdruck von rechts nach links liest, so ergibt sich daraus der Satz:

Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden Faktor radiziert und die erhaltenen Wurzeln miteinander multipliziert.

Zwei Wurzeln mit demselben Wurzelexponent werden durcheinander dividiert, indem man den Quotient aus dem Radikand des Zählers und dem des Nenners durch den gemeinsamen Wurzelexponent radiziert. $\sqrt[l]{p} : \sqrt[l]{q} = \sqrt[l]{p : q}$.

$$\left(\sqrt[l]{p} : \sqrt[l]{q}\right)^l = \left(\sqrt[l]{p}\right)^l : \left(\sqrt[l]{q}\right)^l = p : q \text{ und } \left(\sqrt[l]{\frac{p}{q}}\right)^l = p : q.$$

Von rechts nach links gelesen:

Ein Quotient wird mit einer Zahl radiziert, indem man die Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners dividiert.

Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den mit dieser Zahl potenzierten Radikand durch den Wurzelexponent radiziert. $\left(\sqrt[l]{p}\right)^m = \sqrt[l]{p^m}$.

Es ist sowohl $\left[\left(\sqrt[l]{p}\right)^m\right]^l = \left[\left(\sqrt[l]{p}\right)^l\right]^m = p^m$ als auch $\left(\sqrt[l]{p^m}\right)^l = p^m$.

Von rechts nach links gelesen:

Eine Potenz wird durch eine Zahl radiziert, indem man die mit dem Wurzelexponent radizierte Grundzahl mit dem Potenzexponent potenziert.

Eine Wurzel wird durch eine Zahl radiziert, indem man den Radikand mit dem Produkte beider Wurzelexponenten radiziert. $\sqrt[l]{\sqrt[m]{p}} = \sqrt[lm]{p}$.

Wenn wir beide Seiten dieser Gleichung mit dem Produkte der Wurzelexponenten lm potenzieren, erhalten wir beide Male p, denn es ist $\left(\sqrt[l]{\sqrt[m]{p}}\right)^{lm} = \left(\sqrt[m]{p}\right)^m = p$ und $\left(\sqrt[lm]{p}\right)^{lm} = p$.

Von rechts nach links gelesen:

Eine Zahl wird mit einem Produkte radiziert, indem man sie zuerst durch den einen und dann durch den andern Faktor radiziert.

Nachdem wir schon früher den Potenzbegriff auf negative Exponenten ausgedehnt haben, können wir jetzt eine neue Erweiterung desselben in der Weise vornehmen, daß wir die Wurzeln als Potenzen mit gebrochenem Exponenten darstellen. Soll nämlich $(p^k)^n = p^{kn}$ eine allgemein gültige Formel sein, so ist für $k = \frac{m}{n}$ zunächst $\left(p^{\frac{m}{n}}\right)^n = p^m$ und somit $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m}$.

Mit Benützung dieser Umformung nehmen die oben über die Wurzeln aufgestellten Sätze folgende Gestalt an: $p^{\frac{1}{l}} \cdot q^{\frac{1}{l}} = (p \cdot q)^{\frac{1}{l}}$

$$p^{\frac{1}{l}} : q^{\frac{1}{l}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{l}}, \quad \left(p^{\frac{1}{l}}\right)^m = p^{\frac{m}{l}} \text{ und } \left(p^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{l}} = p^{\frac{1}{ml}}.$$

Die auf gebrochene Exponenten bezogenen Sätze über das Rechnen mit Potenzen können auf analoge Sätze über das Rechnen mit Wurzeln zurückgeführt werden.

$$b^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{k}{l}} = \sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[l]{b^k} = \sqrt[nl]{b^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{b^{nk}} = \sqrt[nl]{b^{ml+nk}} = b^{\frac{ml+nk}{nl}} = b^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}$$

$$b^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{k}{l}} = \sqrt[n]{b^m} : \sqrt[l]{b^k} = \sqrt[nl]{b^{ml}} : \sqrt[nl]{b^{nk}} = \sqrt[nl]{b^{ml-nk}} = b^{\frac{ml-nk}{nl}} = b^{\frac{m}{n}-\frac{k}{l}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a:b)^m} = (a:b)^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k} = \sqrt[nl]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nl}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}} \text{ und endlich}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}.$$

Ursprünglich war die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ nur für positive ganzzahlige Werte von $x \geqq 2$ definiert, dann wurde sie auch für $x = 1$, für 0 und negative Werte festgestellt, und jetzt können wir wenigstens ihren absoluten Wert auch für alle gebrochenen positiven und negativen Werte von x, also für alle rationalen Zahlen angeben.

Wie das Divisionsverfahren mehrgliedriger Ausdrücke auf der Voraussetzung beruht, daß dieselben nach fallenden oder steigenden Potenzen einer in ihnen vorkommenden Veränderlichen geordnet sind, so ist dies auch beim Quadratwurzel- und Kubikwurzelziehen aus mehrgliedrigen Ausdrücken der Fall.

$a x^2 + b x + c$ sei die gesuchte Wurzel; dann ist deren Quadrat $a^2 x^4 + 2 a b x^3 + (b^2 + 2 a c) x^2 + 2 b c x + c^2$.

Ist also die höchste Potenz der Veränderlichen eines Radikanden geradzahlig, so finden wir das erste Glied der Wurzel, indem wir aus dem ersten Gliede des nach fallenden Potenzen geordneten Radikanden die Quadratwurzel ziehen $\sqrt{a^2 x^4} = a x^2$. Das zweite Glied der Wurzel, nämlich $b x$ erhalten wir, wenn wir das zweite Glied des Radikanden $2 a b x^3$ durch $2 a x^2$, also durch das Doppelte des bereits gefundenen ersten Gliedes dividieren. Um endlich das dritte Glied der Wurzel c zu erhalten, müssen wir zuerst vom Radikand das Quadrat des Binoms $ax^2 + bx$, also $a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2$ subtrahieren und dann wieder das erste Glied des Restes, nämlich $2 a c x^2$ durch den doppelten Betrag des ersten Gliedes, also durch $2 a x^2$ dividieren. Ist der Radikand das „vollständige Quadrat“ des obigen Trinoms $a x^2 + b x + c$, so darf er außer den Gliedern $2acx^2 + 2bcx + c^2$ keinen andern Summand enthalten. Bleibt aber ein Rest übrig, so führt die Fortsetzung dieses Verfahrens nie mehr zu einem Abschluß. Es würde im Wurzelausdruck eine endlose Reihe neuer Glieder auftreten, weil die Zahl der Glieder im Rest immer zunimmt. Eine ganze Funktion von x kann also nur dann ein „vollständiges Quadrat“ sein, wenn dieses Verfahren nach der Entwicklung von $n + 1$ Gliedern den Rest 0 ergibt, falls die höchste Potenz von x im Radikand $2 n$ war.

In ähnlicher Weise läßt sich das Verfahren beim Kubikwurzelziehen aus dem arithmetischen Zusammenhang zwischen den Gliedern eines Binoms und seiner dritten Potenz ableiten. Soll eine ganze Funktion von x ein „vollständiger Kubus“ sein, so muß zunächst der Exponent der höchsten Potenz von x eine durch 3 teilbare Zahl sein. Vergleichen wir den Radikand $\sqrt[3]{a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3}$ mit der Wurzel $a x + b$, so sehen wir, daß das erste Glied des gesuchten Ausdruckes die dritte Wurzel aus dem ersten Glied $a^3 x^3$ im Radikand ist; das zweite Glied der Wurzel b ist der Quotient aus dem zweiten Glied des Radikanden $3 a^2 b x^2$ und dem dreifachen Quadrat des früher gefundenen ersten Gliedes $3 a^2 x^2$. Enthielt das erste Glied des Radikanden den Faktor x^{3n}, und es bleibt ein Rest, wenn wir den Kubus des gefundenen Binoms vom Radikand sub-

trahieren, so erhalten wir ein drittes Glied der Wurzel, wenn wir das höchste Glied des Restes wieder durch das dreifache Quadrat des gefundenen Binoms, mithin auch seines ersten Gliedes dividieren und alle Glieder des Kubus der neuen Wurzel vom früheren Reste subtrahieren. Hat die höchste Potenz von x, die im Radikand auftritt, den Exponent $3n$, so muß bei einem „vollständigen Kubus" der Rest gleich 0 sein, nachdem wir als Wurzel einen Ausdruck n-ten Grades gefunden und dessen dritte Potenz vom Radikand subtrahiert haben. Ist dieser nicht 0, so führt auch die Fortsetzung dieses Verfahrens zu keinem Abschluß.

Die Radizierung besonderer und zwar dekadisch angeschriebener ganzer Zahlen ist ein spezieller Fall der Radizierung ganzer Funktionen, wobei die Veränderliche x nur im Stellenwert der Grundzahl des Zahlensystems (10) zum Ausdruck kommt und die Ziffern als Koeffizienten erscheinen. Wir subtrahieren daher zuerst vom Radikand das größte in ihm enthaltene Quadrat eines Vielfachen von 10^n und dividieren den Rest durch das Doppelte der bereits gefundenen ersten Stelle der Wurzel, um die zweite Stelle zu erhalten. Hierauf wird nicht nur das doppelte Produkt, sondern auch das Quadrat der zweiten Stelle der Wurzel vom Radikand subtrahiert, und der neue Rest durch das Doppelte der bereits gefundenen Wurzelstellen dividiert, um die nächste Stelle zu erhalten, bis schließlich der Rest 0 herauskommt, wenn der Radikand ein „vollständiges Quadrat" ist. Die von der Einerstelle ausgehende Einteilung des Radikanden in Gruppen von je zwei Ziffern hat den Vorteil, sofort die Zahl der Stellen in der Wurzel zu finden und aus der höchsten Gruppe die erste Ziffer der Wurzel zu ermitteln.

In ähnlicher Weise läßt sich das Radizieren algebraischer Ausdrücke bei der Berechnung der Kubikwurzel auf dekadische Zahlen übertragen. Da die dritte Potenz jeder Stelle der Wurzel drei Stellen des Radikanden beeinflußt, so muß dieser von der Einerstelle aus in Gruppen zu drei Ziffern eingeteilt werden, um so die Zahl der Stellen der Wurzel und die höchste Gruppe ersichtlich zu machen, die zur Ermittlung der ersten Ziffer der Wurzel dient.

Endliche Dezimalbrüche werden radiziert, indem man sie vom Dezimalpunkt aus in Gruppen zu zwei, bzw. drei Ziffern teilt, je nachdem es sich um eine Quadrat- oder Kubikwurzel handelt. Der links vom Dezimalpunkt stehenden Gruppe entspricht die Einerstelle der Wurzel. Die Wurzel enthält so viele Dezimalstellen, als der Radikand rechts vom Dezimalpunkt stehende Gruppen besitzt. Fassen wir den Radikand und die Wurzel als ein Vielfaches der niedersten Stelle der niedersten Gruppe auf, so ist ersterer nur dann

ein vollständiges Quadrat, bzw. ein vollständiger Kubus, wenn nach Berechnung der niedersten Stelle der Rest Null herauskommt. Im gegenteiligen Falle führt das Verfahren des Wurzelziehens zu keinem Abschluß, d. h. zur fortschreitenden Berechnung einer endlosen Reihe von Ziffern. Wenn wir uns bei der Feststellung der Wurzel mit einer endlichen Anzahl so gefundener Stellen begnügen, so spricht man von einer nur „angenäherten Darstellung" der Wurzel durch einen „unvollständigen Dezimalbruch".

Irrationale Wurzeln und Gleichungen.

Die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, die nicht schon das Quadrat einer ganzen Zahl ist, kann keinen rationalen Wert haben. Ist $n^2 < a < (n+1)^2$ und sind p und q relative Primzahlen, für welche $n < \frac{p}{q} < n+1$, dann ist auch $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ keine ganze Zahl, und es ist daher ausgeschlossen, daß eine Zahl von der Form $\frac{p}{q}$ die Quadratwurzel von a sei. Eine Zahl, die quadriert gleich 23 ist, muß zwischen 4 und 5 liegen, weil $4^2 = 16$ und $5^2 = 25$. Alle zwischen 4 und 5 liegenden gebrochenen Zahlen geben aber immer nur gebrochene Zahlen als Quadrat. Das Verfahren des Wurzelziehens kann also in einem solchen Falle nie zu einem rein- oder gemischtperiodischen Dezimalbruch führen, da sich derselbe in einen gemeinen Bruch verwandeln läßt. Wir müssen daher unter dieser Annahme zu einer endlosen Reihe von nichtperiodischen Dezimalstellen gelangen, und jedem solchen endlosen Dezimalbruch entspricht ein endlicher Grenzwert, der also nur eine irrationale Zahl sein kann. Daraus folgt:

Alle Wurzeln aus jenen ganzen und gebrochenen Zahlen sind irrational, die nicht durch Potenzierung mit dem Wurzelexponent aus einer ganzen oder gebrochenen Zahl hervorgegangen sind.

Wir können aber diese irrationalen Wurzeln als Grenzwerte rationaler Zahlen darstellen, indem wir nach dem bekannten Radizierungsverfahren beliebig viele Stellen entwickeln, denn es läßt sich dann für jede noch so kleine Zahl ε eine Zahl G angeben, daß der Unterschied zwischen der gesuchten Wurzel und der berechneten unvollständigen Zahl kleiner ist als ε, wenn die Zahl der Dezimalstellen größer als G gewählt wird.

Soll z. B. die Differenz $|\sqrt{23} - W| < 0{\cdot}001$ sein, so brauchen wir nach diesem Verfahren nur um eine Stelle mehr zu entwickeln als die Zahl $1000 = 1 : 0{\cdot}001$ Ziffern hat, also vier. Wir erhalten so 4·7958 und finden, daß $4{\cdot}7958^2 = 22{\cdot}99969764$ und $4{\cdot}7959^2 = 23{\cdot}0065681$, daß also ersterer Wert noch zu klein, letzterer schon zu groß ist, mithin der Fehler weniger als 0·0001 und daher weniger als 0·001 beträgt. Der irrationale Grenzwert jenes endlosen Dezimalbruches, der sich bei unbegrenzter Fortsetzung des Radizierungsverfahrens aus der Zahl 23 ergeben würde, dieser ist es also, den wir mit $\sqrt{23}$ bezeichnet haben.

Das bei **Euklid** vorkommende Wort *συμμετρος* hat der berühmte Philosoph **Boëthius** mit „commensurabilis" übersetzt. Nichtkommensurable Größen nennt zuerst **Gerhard von Cremona** (1114—1187 in Toledo) „irrational" und der Engländer **Bradwardin** († 1349 in London) „assymmetrisch". **Leonhard von Pisa** (1202) gebraucht dafür den Ausdruck „surdus". Letzterer hat sich noch im Ausdruck „surdische Binome" erhalten.

Unter einem **surdischen Binom** versteht man einen Ausdruck von der Form $a \pm \sqrt{b}$. Sind b und $a \pm \sqrt{b}$ nicht vollständige Quadrate, so ist nicht nur $\sqrt{b}$ irrational, sondern auch die Wurzel $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ und, um letztere zu berechnen, müßten wir aus einer irrationalen Zahl die Quadratwurzel ziehen. Dies läßt sich aber vermeiden, wenn $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist. Aus

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = a+\sqrt{b}+a-\sqrt{b} \pm 2\sqrt{a^2-b}$$
$$= 2a \pm 2\sqrt{a^2-b}$$

folgt nämlich $$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}$$

und durch Addition und Subtraktion der Gleichungen

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2-b}}$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2-b}}$$

erhalten wir die beiden Ausdrücke

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

und

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

bei welchen unter dem größeren Wurzelzeichen keine zweite irrationale Zahl mehr auftritt, wenn $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist und sich ohne Wurzelzeichen ausdrücken läßt.

Ebenso sucht man unter Umständen Brüche, deren Nenner irrationale Wurzelausdrücke enthalten, so umzuformen, daß der Nenner „rational“ wird und die Irrationalität nur im Zähler auftritt, obwohl an und für sich weder der Radizierung einer irrationalen Wurzel noch der Division durch einen irrationalen Divisor rechnerische Schwierigkeiten entgegenstehen, wenn man sich auf das Rechnen mit unvollständigen Dezimalbrüchen mit einer bestimmten Anzahl von Stellen beschränkt.

Da wir im Abschnitt über das Rechnen mit Grenzwerten gezeigt haben, daß für dieselben die gleichen Rechnungsgesetze gelten, wie für rationale Zahlen, so dürfen wir Zähler und Nenner eines Bruches auch mit endlichen Grenzwerten multiplizieren, ohne daß sich dadurch der Wert des Bruches ändert.

Es ist daher
$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}, \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}, \quad \frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$$

und
$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}, \quad \frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c},$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}, \quad \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

Irrationale Gleichungen. Wie wir die nichtrationalen Wurzeln ganzer und gebrochener Zahlen „irrationale Zahlen“ nennen, so pflegt man auch jene algebraischen Ausdrücke als „irrational“ zu bezeichnen, bei welchen unter dem Quadratwurzelzeichen ein Ausdruck vorkommt, der kein vollständiges Quadrat ist. Ähnliches gilt allgemein dann, wenn sich der Radikand nicht als eine Potenz mit demselben Exponenten darstellen läßt, den die Wurzel hat. Soll eine solche Wurzel dem Werte eines rationalen Ausdruckes gleich sein, der die nämliche Unbekannte enthält, wie der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, so bezeichnet man die eine solche Forderung enthaltende Gleichung ebenfalls als irrational. So ist z. B. $\sqrt{ax-b} = cx-d$ eine irrationale Gleichung, weil $ax-b$ kein vollständiges Quadrat, aber $cx-d$ ein rationaler Ausdruck ist. Die Lösung solcher Gleichungen beruht auf dem Satze, daß dieselben Potenzen zweier Ausdrücke nur dann gleiche Werte haben, wenn die Grundzahlen gleich sind. Man formt daher solche Gleichungen in der Weise um, daß sie keine Wurzeln mehr enthalten, und erreicht dies, indem man einen Wurzelausdruck allein auf die eine Seite der Gleichung bringt und dann beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponent potenziert. Durch fortgesetzte Anwendung dieses

Verfahrens kann man der Reihe nach alle Wurzeln entfernen und gelangt so immer zu Gleichungen, die durch dieselben Lösungen befriedigt werden wie die ursprüngliche Gleichung.

Heißt die vorgegebene Gleichung $\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}=e$, so erhalten wir zunächst aus $\sqrt{ax+b}=-\sqrt{cx+d}+e$ durch Quadrieren $ax+b=cx+d+e^2-2e\sqrt{cx+d}$ und daraus $\sqrt{cx+d}$ $=\frac{c-a}{2e}x+\frac{e^2+d-b}{2e}$. Ist in dieser Gleichung $a=c$, so ergibt sich hieraus sofort die lineare Gleichung $cx+d=\left[\frac{e^2+d-b}{2e}\right]^2$ und aus dieser die Lösung $x=\left(\left[\frac{e^2+d-b}{2e}\right]^2-d\right):c$. Wenn aber $a \gtrless c$, so gelangen wir durch nochmaliges Quadrieren zu einer Gleichung zweiten Grades, wie dies auch der Fall ist, wenn wir die Gleichung $\sqrt{ax+b}=cx+d$ durch Quadrieren auflösen. Wir finden dann $ax+b=c^2x^2+2cxd+d^2$, mithin eine quadratische Gleichung. In ähnlicher Weise müssen auch die irrationalen Gleichungen umgeformt werden, welche mehr als eine Unbekannte enthalten.

Die Logarithmen.

Wenn wir im Ausdruck $b^x=p$ den Exponent als Unbekannte auffassen und denselben aus dem Wert der Potenz p und der Grundzahl b berechnen, so bezeichnen wir diese Rechnungsoperation als „logarithmieren", x heißt dann der „Logarithmus von p in bezug auf die Grundzahl b" und wir schreiben dafür $x={}^b\log p$. Die Auffindung solcher Zahlen erfolgte fast unabhängig von der Entwicklung des ihm so nahestehenden Potenzbegriffes, und ihre Spuren gehen schon auf das Altertum zurück. Archimedes, einer der vielseitigsten und hervorragendsten Mathematiker und Physiker aller Zeiten, machte gelegentlich der Behandlung seiner „Sandrechnung" die Bemerkung, daß eine endlose Reihe von Zahlen, deren erste gleich 1 ist, während jede folgende aus der unmittelbar vorhergehenden durch Multiplikation mit derselben Zahl a abgeleitet wird, folgende Eigenschaft hat: Wenn man irgend zwei von den Zahlen 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, ... miteinander multipliziert, so erhält man wieder eine Zahl der Reihe, und zwar diejenige, zu der wir auch gelangen, wenn wir die Ordnungszahlen der beiden Faktoren addieren. Ist demnach $a_0=1$, $a_1=a$, $a_2=a^2$, $a_3=a^3$, $a_4=a^4$, $a_5=a^5$, $a_6=a^6$, $a_7=a^7$ usw., so gelangen wir in beiden

Fällen zur Zahl $a_7 = a^7$, ob wir das eine Mal die Multiplikation $a_3 \cdot a_4 = a^3 \cdot a^4 = a^7 = a_7$ oder die Summe der Indexzahlen $3 + 4 = 7$ bilden und dann die Zahl $a_7 = a^7$ auswählen. Diese Erkenntnis pflanzte sich bis auf die Mathematiker der Renaissancezeit fort. Damit beschäftigten sich der Franzose Chuquet († 1500) in Paris und Luca Paciuolo († 1514) in Florenz, und der deutsche Mathematiker M. Stifel († 1567) in Jena erkannte bereits, daß man durch eine ausführliche Darstellung zweier solcher Reihen die Multiplikation mit einer Addition, die Division mit einer Subtraktion und das Quadratwurzelziehen mit einer Halbierung in Verbindung bringen könne. Der durch seine vielseitigen Kenntnisse ausgezeichnete Schweizer Joost Bürgi unterzog sich der überwältigenden Arbeit, solche Reihen im größeren Umfange auszurechnen und veröffentlichte im Jahre 1620 in Prag seine „Progreß-Tabuln". Als die Zahl, mit der jedes Glied der Reihe multipliziert wird, um das Folgende zu erhalten, verwendet er $a = 1 + \frac{1}{10000} = 1{\cdot}0001$, und um beim Rechnen Dezimalbrüche zu vermeiden, geht er nicht von 1, sondern von 10^8 aus. Die Ordnungsziffern nannte Bürgi „rote Ziffern" und die durch Multiplikation gewonnenen „schwarze" Ziffern, weil er sie auch durch diese Druckfarbe als solche kenntlich machte. Fast gleichzeitig legte der englische Mathematiker John Neper, Baron von Merchiston, ähnliche Tabellen an, ging aber von der Zahl 10^7 aus, multiplizierte sie mit $a' = 1 - \frac{1}{10^7}$ und nannte die Ordnungszahlen „natürliche" und die berechneten „künstliche" Zahlen. Er war es auch, der für diese Zahlen mit ihrem konstanten Verhältnis (*λογου αριϑμὸς*) den Namen „Logarithmen" einführte. Die ihnen entsprechenden Ordnungszahlen werden nach dem Beispiele des Oxforder Mathematikers Wallis auch jetzt noch „Antilogarithmen" genannt; dafür ist auch der Ausdruck „Numerus" gebräuchlich. Erst Leonhard Euler faßte die so entwickelten Logarithmen als eine dem Wurzelziehen analoge Umkehrung des Potenzbegriffes auf, wie auch wir es zu tun pflegen. Wir gehen daher von der Definition aus:

Der Logarithmus ist diejenige Zahl, mit der wir die als Basis gewählte Zahl b potenzieren müssen, um eine vorgegebene Zahl, den Numerus oder Antilogarithmus n zu erhalten. Es ist also $x = {}^b\log n$, wenn $b^x = n$ ist.

Hieraus folgen die für das Rechnen mit Logarithmen nötigen Regeln.

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der auf dieselbe Basis bezogenen Logarithmen der Faktoren. $\log(p \cdot q) = \log p + \log q$.

Aus $p = b^l$, $q = b^m$ und $p \cdot q = b^l \cdot b^m = b^{l+m}$ folgt $l + m = \log p + \log q = \log(p \cdot q)$. Von rechts nach links gelesen lautet dieser Satz:

Die Summe zweier auf dieselbe Basis bezogenen Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Produktes.

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der auf dieselbe Basis bezogenen Logarithmen des Dividenden und Divisors. $\log(p : q) = \log p - \log q$.

Aus $p : q = b^l : b^m = b^{l-m}$ folgt $l - m = \log p - \log q = \log(p : q)$. Die Umkehrung lautet:

Die Differenz zweier auf dieselbe Basis bezogenen Logarithmen ist gleich dem Logarithmus des Quotienten, dessen Dividend der Numerus des Minuenden und dessen Divisor der Numerus des Subtrahenden ist.

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkte aus dem Logarithmus ihrer Grundzahl und dem Potenzexponenten. $\log(p^n) = n \cdot \log p$.

Aus $p = b^l$ und $p^n = (b^l)^n = b^{ln}$ folgt $n \cdot l = n \cdot \log p = \log(p^n)$. Umgekehrt ergibt sich der Satz:

Der mit einer Zahl n multiplizierte Logarithmus ist gleich dem Logarithmus des mit dieser Zahl potenzierten Numerus.

Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponent dividierten Logarithmus des Radikanden.

$$\log \sqrt[n]{p} = \frac{1}{n} \log p.$$

Aus $p = b^l$ und $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{b^l} = b^{\frac{l}{n}}$ folgt $\frac{l}{n} = \frac{1}{n} \log p = \log \sqrt[n]{p}$.

Die Umkehrung heißt:

Der Quotient aus einem Logarithmus und einer Zahl ist zugleich der Logarithmus der absoluten Wurzel des mit dieser Zahl radizierten Numerus.

Die auf zwei verschiedene Grundzahlen bezogenen Logarithmen haben für jede Zahl denselben Quotient, und dieser ist der Logarithmus der Basis des Nenners, bezogen auf die Basis des Zählers. ${}^b\log n : {}^g\log n = {}^b\log g$.

Wenn wir nämlich beide Teile der Gleichung $g^x = n$ in bezug auf eine neue Basis b logarithmieren, so erhalten wir $x \cdot {}^b\log g = {}^b\log n$, und wegen $g^x = n$ ist $x = {}^g\log n$, also ${}^g\log n \cdot {}^b\log g = {}^b\log n$ und daher ${}^b\log g = {}^b\log n : {}^g\log n$.

Da mithin ${}^{g}\log n = {}^{b}\log n : {}^{b}\log g$, so können wir aus allen auf die Grundzahl b bezogenen Logarithmen die auf eine neue Grundzahl g bezogenen Logarithmen berechnen, indem wir dieselben mit der Zahl $M = 1 : {}^{b}\log g$, dem sogenannten „Modulus" multiplizieren.

Die Verfasser der ersten Logarithmentafeln haben sich insgesamt um die Grundzahl ihres Logarithmensystems gar nicht gekümmert. Überlegen wir aber, daß die Zahl 1 als Basis nicht geeignet wäre, weil alle ihre Potenzen wieder 1 geben und daher für alle davon verschiedenen Werte die Logarithmen dieser Basis gar nicht existieren, daß negative Zahlen unbrauchbar sind, weil das Vorzeichen ihrer Potenz fortwährend wechselt, so oft der Exponent von einer geraden zu einer ungeraden Zahl übergeht, so ergibt sich, daß wir nur von 1 verschiedene positive Zahlen als Grundzahl eines „Logarithmensystems" verwenden können. Da ferner Zahlen, die kleiner als 1 sind, um so kleinere Potenzen haben, je größer der Exponent ist, so empfiehlt es sich, eine Zahl zu wählen, die größer ist als 1. Wegen der großen Vorteile, die beim dekadischen Rechnen die Verwendung der Grundzahl 10 bietet, hat zuerst der an der Herausgabe der Neperschen Tafel beteiligte Henry Briggs den Vorschlag gemacht, die Basis des allgemein gebräuchlichen Zahlensystems zugleich als Basis des Logarithmensystems zu verwenden, worauf Neper sofort einging. Man bezeichnet daher die auf 10 bezogenen Logarithmen als „Briggssche", die älteren dagegen als „Nepersche" Logarithmen. Andererseits führen erstere auch die Bezeichnung „künstliche" oder „gemeine", während die Neperschen, welche sich ohne die willkürliche Wahl von 10 als Grundzahl durch bloße Gegenüberstellung der beiden Reihen, also auf natürlichem oder einfacherem Wege ergeben, „natürliche" Logarithmen genannt werden.

Wegen $b^1 = b$ ist ${}^{b}\log b = 1$, d. h.: **Der Logarithmus der Grundzahl des Logarithmensystems ist für jede Basis gleich 1.**

Wegen $b^0 = 1$ ist ${}^{b}\log 1 = 0$, d. h.: **Der Logarithmus der positiven Einheit ist bei jeder Basis gleich Null.**

Ist $n = 10^m$, so folgt ${}^{10}\log n = m$, d. h. der Logarithmus jeder positiven oder negativen Potenz von 10 ist gleich ihrem Potenzexponenten und daher eine positive oder negative ganze Zahl, wenn der Potenzexponent eine solche ist.

In jedem andern Falle ist entweder der Logarithmus eine irrationale Zahl, wenn der Numerus m eine ganze oder gebrochene Zahl ist, oder es ist der Numerus eine irrationale Zahl, wenn der Logarithmus eine gebrochene rationale Zahl ist. Natürlich können auch beide Zahlen irrational sein. Wäre der Logarithmus eine ge-

brochene Zahl $\frac{p}{q}$, während der Numerus n eine ganze Zahl, aber keine Potenz von 10 ist, so müßte $10^p = n^q$, also eine Potenz von 10 mit ganzzahligem Exponent einer Zahl gleich sein, die auch noch andere Primfaktoren enthält als 10. Das ist nicht möglich. In diesem Falle muß also der Logarithmus eine irrationale Zahl sein. Dies trifft um so mehr zu, wenn n selbst schon eine gebrochene Zahl ist, weil dann auch n^q eine gebrochene Zahl ist und als solche nicht der ganzen Zahl 10^p gleich sein kann. Ist dagegen der Logarithmus eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$, so ist 10^p ebenfalls eine ganze Zahl, aber die q-te Wurzel aus 10^p, mithin auch der Numerus eine irrationale Zahl. Da wir übrigens mit den irrationalen Grenzwerten rationaler Zahlen rechnen dürfen wie mit rationalen Zahlen, so gelten die für das Rechnen mit Logarithmen aufgestellten Sätze auch für irrationale Werte, wofern wir dieselben als Grenzwerte mit hinlänglicher Genauigkeit darstellen.

Um das auf die Grundzahl 10 bezogene **künstliche, gemeine** oder **Briggssche Logarithmensystem** auszurechnen, können wir, falls nur die bisher verwendeten Rechnungsoperationen verwendet werden sollen, folgenden Weg einschlagen. Durch fortgesetztes Quadratwurzelziehen berechnen wir der Reihe nach jene Potenzen von 10, deren Exponenten die aufeinanderfolgenden Potenzen von $\frac{1}{2}$ sind, nämlich $\frac{1}{2} = 0{\cdot}5$, $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$, $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} = 0{\cdot}125$, $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} = 0{\cdot}0625$ usw., und gelangen so zu einer Tabelle von Numeruswerten mit den dazugehörigen Logarithmen, die zur Berechnung aller Logarithmen hinreicht.

Wir stellen hierauf jede Zahl, deren Logarithmus wir berechnen wollen, als Produkt jener Numeruswerte hin, die in dieser Tabelle vorkommen. Der gesuchte Logarithmus ist dann die Summe der ihnen in der Tabelle entsprechenden Logarithmen. So finden wir z. B. log 5·630141, indem wir zunächst 5·630141 durch die größte in ihr enthaltene Zahl der Tabelle 3·1622777 dividieren, und daraus ergibt sich $5{\cdot}630141 = 3{\cdot}1622777 \cdot 1{\cdot}780407 = 10^{0{\cdot}5} \cdot 1{\cdot}780407$. Den zweiten Faktor dividieren wir abermals durch den größten in ihm enthaltenen Numerus der Tabelle und stellen ihn als Produkt einer Potenz von 10 und einer dritten Zahl dar; so fortfahrend erhalten wir $5{\cdot}630141 = 10^{0{\cdot}5} \cdot 10^{0{\cdot}25} \cdot 10^{0{\cdot}000488} \cdot 10^{0{\cdot}000031} \cdot 10^{0{\cdot}000001} = 10^{0{\cdot}75052}$, und daher ist $\log 5{\cdot}630141 = 0{\cdot}75052$.

Das „Aufschlagen" der Briggsschen Logarithmen und Antilogarithmen mit Hilfe der zu diesem Zwecke hergestellten Logarithmentafeln geschieht nach folgenden Regeln: Man bestimmt für

den gegebenen Numerus zuerst die „Charakteristik" und dann die „Mantisse". Unter „Charakteristik" versteht man die im Logarithmus enthaltenen ganzen Einheiten. Für Potenzen von 10 mit ganzzahligem Exponent ist dieser zugleich Logarithmus und Charakteristik. Jede andere positive Zahl liegt zwischen zwei Potenzen von 10. Ihre Charakteristik ist in diesem Falle der Exponent der nächstkleineren Potenz von 10. Dieser Exponent ist zugleich um eine Einheit kleiner als die Zahl der links vom Dezimalpunkt stehenden Stellen; somit ist die Charakteristik aller Zahlen über 1 ebenfalls um eine Einheit kleiner als die Zahl der ganzen Stellen. Die Charakteristik aller Zahlen zwischen 1 und 10 ist also 0. Eine Potenz von 10 mit negativem Exponent erscheint als Dezimalbruch mit so vielen der Ziffer 1 vorausgehenden Nullen — die Null links vom Dezimalpunkt mitgezählt — als der Exponent negative Einheiten enthält. $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{\cdot}001$. Die Charakteristik dieser Zahl ist daher „—3". Jeder andere Numerus, der kleiner als 1 ist und daher als Dezimalbruch angeschrieben wenigstens die vor dem Dezimalpunkt stehende Null enthält, kann als Produkt jener Potenz von 10 angesehen werden, die einer Einheit seiner höchsten Stelle entspricht und einer Zahl mit derselben Ziffernfolge, bei der die höchste Ziffer die Einerstelle einnimmt. Der erste Faktor liefert dann die Charakteristik, die so viele negative Einheiten besitzt, als der höchsten Ziffer Nullen vorausgehen. Der zweite Faktor liefert die „Mantisse". Es ist also $0.00325 = 10^{-3} \cdot 3{\cdot}25$.

Unter der „Mantisse" versteht man den Logarithmus jener Zahl, welche dieselbe Ziffernreihe besitzt und die zwischen 1 und 10 liegt. Diese Logarithmen findet man in den auf fünf Stellen berechneten Tafeln so angegeben, daß die drei höchsten Ziffern des Numerus am Rande links und die vierte in der obersten und untersten Zeile zu finden sind. Die Logarithmen aller vierziffrigen Zahlen sind also unmittelbar in den Tafeln angegeben.

Den Logarithmus einer fünfziffrigen Zahl finden wir aus den Logarithmen der nächsthöheren und nächstniedrigeren vierziffrigen Zahl durch „Interpolation".

Betrachten wir die Mantissen der drei aufeinanderfolgenden vierziffrigen Zahlen 2123, 2124 und 2125, so finden wir in fünfstelligen Tafeln die Mantissen 0·32695, 0·32715 und 0·32736. Die Mantisse der mittleren Zahl können wir aus denen der beiden anderen mittels der Proportion berechnen $(2125 - 2123) : (2124 - 2123) = (0{\cdot}32736 - 0{\cdot}32695) : x$, indem wir annehmen, daß die Differenzen der Numeruswerte den Differenzen der Mantissen proportional seien.

So erhalten wir zunächst die neue Proportion $2:1 = 0{\cdot}00041:x$ und daraus $x = 0{\cdot}00041:2 = 0{\cdot}000205$; wenn wir diesen Betrag zur niedersten Mantisse hinzuzählen, so finden wir für den mittleren Numerus $0{\cdot}32695 + 0{\cdot}000205 = 0{\cdot}32715(5)$, also einen Wert, der vom vorgefundenen um keine ganze Einheit der niedersten Stelle abweicht, obwohl wir von zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Logarithmen ausgingen. Wenn wir daher nach demselben Verfahren zwischen irgend zwei aufeinanderfolgende Mantissen neun voneinander gleichweit abstehende Zwischenwerte einschalten, so wird auch der Fehler kleiner sein, als ein Zehntel der niedersten Stelle. Wir erhalten demnach für die zwischen 21230 und 21240 liegenden ganzen Zahlen die entsprechenden Logarithmen, wenn wir die Differenz ihrer Mantissen durch 10 dividieren und den mit der fünften Ziffer multiplizierten Quotient zur kleineren Mantisse addieren. Diese durch 10 dividierten Differenzen werden als „Partes proportionales" (P. P.) bezeichnet.

Um zu einer vorgegebenen Mantisse den entsprechenden Numerus zu finden, suchen wir zunächst den nächstkleineren Logarithmus auf, der in der Tafel angegeben ist, und berechnen, wie viele Zehntel der „Tafeldifferenz", d. h. der Differenz zweier in der Tafel unmittelbar aufeinanderfolgender Logarithmen, in der Differenz zwischen der gegebenen Mantisse und der nächstkleineren in der Tafel enthalten sind.

Die Zahl der beim Logarithmus angegebenen ganzen Einheiten bestimmt die Stellung des Dezimalpunktes im Numerus; ist der Logarithmus **negativ**, so stellt man ihn als **Differenz einer positiven Mantisse und einer negativen Charakteristik dar.**

Wie wir früher gezeigt haben, lassen sich aus einem Logarithmensystem die auf eine andere Grundzahl bezogenen Logarithmen in der Weise ableiten, daß man sie insgesamt mit derselben Zahl multipliziert, und diese Zahl ist der Modulus $M = \frac{1}{{}^{b}\log g}$, wenn b die Basis der früheren und g die der neu zu berechnenden Logarithmen ist. Die von Bürgi berechneten Logarithmen erhalten wir aus den auf die Basis 10 bezogenen gemeinen Logarithmen durch Multiplikation mit $M = \frac{1}{{}^{10}\log g} = 2{\cdot}302585 = 1:0{\cdot}434294$. So ist z. B. von 73 der natürliche Logarithmus $4{\cdot}29046$ und der gemeine Logarithmus $1{\cdot}86332$ und $\frac{1{\cdot}86332}{4{\cdot}29046} = 0{\cdot}434294 = {}^{10}\log g$, also $10^{0{\cdot}43429} = g$; schlagen wir den Numerus des Logarithmus $0{\cdot}434294$ auf, so finden

wir $g = 2{\cdot}71828$, und das ist die Grundzahl, die Bürgi unbewußt seinem Logarithmensystem zugrunde gelegt hat. Man bezeichnet diese Zahl allgemein mit e.

Kurz vorher hatte Neper seine ebenfalls auf die Zahl $1:2{\cdot}71828$ bezogenen, aber genauer ausgerechneten Logarithmen veröffentlicht und ging erst auf den Rat seines Freundes Briggs zur neuen Grundzahl 10 über. Letzterer gab später auf 14 Stellen berechnete Logarithmentafeln heraus und verdrängte damit die natürlichen Logarithmensysteme. Sehr große Verbreitung fanden die vom Holländer Vlacq auf 10 Stellen berechneten Briggsschen Logarithmen und auch vielfach noch jetzt gebräuchlichen siebenstelligen Tafeln des österreichischen Artillerieoffiziers Georg, Freiherr von Vega. Während man aber einerseits zu immer größeren Stellenzahlen überging und sie stellenweise über 200 steigerte, macht sich in neuerer Zeit, besonders auf die Anregung des großen Mathematikers Gauß hin, das Bestreben geltend, im Interesse der leichteren Handhabung sich auf die allen praktischen Bedürfnissen ebenfalls genügenden fünfstelligen, und nach dem Beispiele des Astronomen Enke sogar nur vierstelligen Logarithmen zu beschränken.

Alle uns bisher bekannt gewordenen Rechnungsoperationen lassen sich mechanisch sehr leicht in der Weise ausführen, daß man zwei Lineale nebeneinander verschiebt, deren eines eine Einteilung mit gleichen Längeneinheiten trägt, während auf dem zweiten die Abstände der Teilstriche den ungleichen Differenzen der aufeinanderfolgenden Logarithmen entsprechen. Die so gewonnenen Resultate besitzen die Genauigkeit zwei- bis dreistelliger Lagarithmentafeln und ermöglichen es, eine vielfach hinreichende Genauigkeit mit einer anderweitig unerreichbaren Geschwindigkeit und Sicherheit zu erzielen. Darin liegt der Wert des Logarithmenschiebers.

Die logarithmische Berechnung einer Summe oder Differenz ist insofern ausgeschlossen, als sich $\log(a \pm b)$ nicht in einfacher Weise durch $\log a$ und $\log b$ darstellen läßt, es sei denn, daß wir nicht so sehr die Summe $a \pm b$ selbst, sondern $\log(a \pm b)$ berechnen wollen und bereits den Wert des Quotienten $\frac{b}{a}$, also auch $1 \pm \frac{b}{a}$ kennen, und hieraus $\log\left[a \cdot \left(1 \pm \frac{b}{a}\right)\right] = \log(a \pm b)$ finden können.

Bei der Berechnung von Ausdrücken, in welchen nur Operationen zweiter und dritter Stufe vorkommen, pflegt man links von einem vertikalen Strich die Numeruswerte und rechts die entsprechenden Logarithmen zu schreiben. Soll ein Logarithmus mit negativer Charakteristik von einem andern Logarithmus subtrahiert

werden, weil sein Numerus ein Divisor ist, so pflegt man zuerst die negative Charakteristik zum Minuend zu addieren und dann erst die Mantisse zu subtrahieren.

Um aus einer Zahl mit negativer Charakteristik eine Wurzel zu ziehen, müssen wir ihren Logarithmus durch den Wurzelexponent dividieren und sollen dabei wieder eine ganze Zahl als negative Charakteristik erhalten. Man addiert daher zugleich zur positiven Mantisse und zur negativen Charakteristik so viele Einheiten, daß letztere durch den Wurzelexponenten teilbar und daher der Quotient wieder eine ganze Zahl wird.

Berechnen wir mit Hilfe entsprechend genauer Logarithmentafeln den Wert der Funktion $f(z)=\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=\left(\frac{z+1}{z}\right)^z$ für $z=10$, 100, 1000, 10000 und 100000, so nimmt $\log f(z)=z\cdot\log\left(1+\frac{1}{z}\right)$ $=z\cdot[\log(z+1)-\log z]$ der Reihe nach die Werte an: $\log f(10)$ $=0{\cdot}41393$, $\log f(100)=0{\cdot}43214$, $\log f(1000)=0{\cdot}43408$, $\log f(10000)$ $=0{\cdot}43427$ und $\log f(100000)=0{\cdot}43429$; daher ist $f(10)=2{\cdot}59374$, $f(100)=2{\cdot}70481$, $f(1000)=2{\cdot}71692$, $f(10000)=2{\cdot}71815$ und $f(100000)=2{\cdot}71827$. Der Wert dieser Funktion nähert sich also um so mehr dem Grenzwert $e=2{\cdot}71828$, je größer z gewählt wird und stimmt mit diesem allerdings unvollständigen Dezimalbruch auf fünf Stellen überein, wenn $z=1000000$ gesetzt wird. Man sagt deshalb, der Grenzwert dieser Funktion $f(z)$ sei die Zahl e und drückt dies mit den Zeichen aus: $\operatorname{Limes}_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=2{\cdot}71828$. Schon für $z=1000$ stimmt der Funktionswert mit dem Grenzwert in drei Ziffern vollständig und in der dritten Dezimalstelle bis auf eine Einheit überein.

Aus der Formel $\log f(z)=z\cdot[\log f(z+1)-\log f(z)]=0{\cdot}43429$ läßt sich für alle vierziffrigen Zahlen die Differenz zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Logarithmen bis auf die fünfte Dezimalstelle genau berechnen; es ist also $\log(z+1)-\log(z)=0{\cdot}43429:z$, und in der Tat finden wir $\log 1964-\log 1963=0{\cdot}43429:1963$ $=0{\cdot}00022$. Aus jeder fünfstelligen Tafel ergibt sich, daß $\log 1964$ $-\log 1963=3{\cdot}29314-3{\cdot}29292=0{\cdot}00022$. Auf diesem Wege kann man zu jedem Logarithmus einer vierstelligen Zahl den Logarithmus der um 1 höheren oder tieferen Zahl berechnen.

Da für den Grenzübergang von $z=\infty$ die Gleichung $\left(1+\frac{1}{z}\right)^z=e$ besteht, so können wir mit dessen Hilfe auch den Grenzwert des

Ausdruckes $\left(1+\frac{x}{z}\right)^z$ berechnen, da $\left(1+\frac{x}{z}\right)^z = \left(1+\frac{1}{z:x}\right)^{(z:x)x}$ $= \left[\left(1+\frac{1}{z:x}\right)^{z:x}\right]^x$. Da ferner für endliche Werte von x auch $(z:x)$ denselben Grenzübergang zu ∞ ausführt, so ist auch

$$\operatorname{Lim}_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z:x}\right)^{z:x} = e \text{ und } \operatorname{Lim}_{z=\infty}\left(1+\frac{x}{z}\right)^z = e^x.$$

Hieraus ergibt sich der folgende, besonders für physikalische Probleme sehr wichtige Lehrsatz:

Sind die Veränderungen einer Funktion sowohl dem Funktionswert $f(x)$ als auch dem Betrage d proportional, um welchen sich x geändert hat, so ist $f(b)=f(a)\cdot e^{k(b-a)}$, wenn $f(x\pm d) - f(x) = k\cdot d\cdot f(x)$.

Wählen wir nämlich d so, daß $d=\frac{b-a}{n}$ und daher $n\cdot d = b-a$, so ist zunächst $\frac{f(a+d)-f(a)}{f(a)} = kd$ und somit $f(a+d) - f(a)$ $= f(a)\cdot kd$, also $f(a+d) = f(a)\cdot(1+kd)$, ferner $f(a+2d)$ $= f(a+d)\cdot(1+kd) = f(a)\cdot(1+kd)^2$, $f(a+3d) = f(a)\cdot(1+kd)^3$ usf. Für $nd = b-a$ erhalten wir durch Wiederholung dieses Verfahrens den Ausdruck $f(a+nd) = f(b) = (1+kd)^n = f(a)\cdot\left(1+\frac{k(b-a)}{n}\right)^n$ $= f(a)\cdot e^{k(b-a)}$, falls $\operatorname{Lim} n = \infty$.

Dies gilt zunächst für den Fall, daß $b > a$. Wenn aber $a > b$ ist, so setzen wir $d=\frac{a-b}{n}$ und $nd = a-b = -(b-a)$; dann ist $f(a-nd) = f(b) = f(a)\cdot e^{k(a-b)} = f(a)\cdot e^{-k(b-a)}$.

So können wir in jedem Falle aus einem Anfangswerte $f(a)$, aus der uns mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit bekannten Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems e und dem Proportionalitätsfaktor k den Funktionswert $f(x)$ für irgend einen anderen Wert von x, z. B. für $x=b$, also $f(b)$ berechnen.

Exponential- und logarithmische Gleichungen.

Bei der Entwicklung der Lehre von den Gleichungen haben wir gesehen, daß es sich dabei um die Bestimmung solcher Werte der unabhängig Veränderlichen x handelt, bei denen eine vorgegebene Funktion einen bestimmten Wert, bzw. den Wert Null annimmt. Bei den irrationalen Gleichungen tritt die ganze Funktion

der Unbekannten unter dem Wurzelzeichen auf, ohne ein vollständiges Quadrat zu sein.

Die Auflösung einer solchen Gleichung stimmt mit der Forderung überein, daß die Wurzel aus einer ganzen Funktion von x einen gegebenen Wert annimmt. Sie stellt mithin eine Verallgemeinerung des Wurzelbegriffes dar. In ähnlicher Weise können wir auch den Exponentialbegriff erweitern und die Forderung aufstellen, daß nicht nur eine Zahl gefunden werden soll, mit der eine bekannte Grundzahl potenziert einen gegebenen Potenzwert gibt — das wäre nichts anderes, als das Berechnen des Logarithmus —, sondern es soll die unabhängig Veränderliche einer ganzen Funktion so gewählt werden, daß die mit dem Funktionswert potenzierte Grundzahl einen angegebenen Wert oder denselben Wert annimmt wie eine zweite Exponentialfunktion von dieser Form. Man kann daher solche Gleichungen in der Weise auf gewöhnliche Gleichungen zurückführen, daß man den Satz benützt: Gleiche Grundzahlen liefern unter gewissen Bedingungen nur dann gleiche Potenzwerte, wenn sie gleiche Exponenten haben. Die Zahlen 0 und 1 müssen nämlich als Grundzahl ausgeschlossen sein, da ihre Potenzen überhaupt nicht veränderlich, sondern konstant sind. Sind aber die Grundzahlen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselben, so müssen auch die Potenzen gleich sein, wenn ihre Logarithmen gleich sind. Der normale Weg zur Lösung solcher Gleichungen ist daher die Logarithmierung beider Teile der Gleichung. So folgt aus $g^{ax+b} = k$, die neue Gleichung $(a x + b) \cdot \log g = \log k$, und hieraus ergibt sich die Lösung $x = \left(\frac{\log k}{\log g} - b\right) : a$.

Aus $g^{ax+b} = k^{cx+d}$ läßt sich auf demselben Wege die Gleichung ableiten: $(a x + b) \log g = (c x + d) \log k$, deren Lösung sich von den gewöhnlichen linearen Gleichungen nur dadurch unterscheidet, daß die Koeffizienten der Unbekannten auch irrationale Werte haben können und daher nur eine angenäherte Berechnung gestatten.

Kommen auf einer oder auf beiden Seiten der Gleichung Summen vor, deren einzelne Glieder x im Exponent enthalten, so läßt sich eine solche Gleichung auf diesem Wege nur dann lösen, wenn alle mit x potenzierten Glieder in ein einziges Glied vereinigt werden, dessen Exponent x enthält.

Kommen in den Exponenten einzelner Summanden verschiedene Unbekannte vor, so empfiehlt es sich, für diese Potenz selbst eine neue Unbekannte einzuführen und aus den für dieselben gefundenen Lösungen durch Logarithmierung den gesuchten Exponent zu berechnen.

Logarithmische Gleichungen heißen solche, denen zufolge der

Logarithmus einer ganzen Funktion einen bestimmten Wert annehmen, bzw. dem Logarithmus einer andern ganzen Funktion gleich sein soll. Gewöhnlich setzt man voraus, daß sich beide Logarithmen auf dieselbe Basis beziehen. Aus der Gleichheit der auf dieselbe Basis bezogenen Logarithmen kann man auf die Gleichheit ihrer Numeruswerte schließen und gelangt so zu einer gewöhnlichen Gleichung, deren Grad natürlich vom Grad der Funktionen abhängt, deren Logarithmus der angegebenen Bedingung genügt. Enthält die gegebene Gleichung eine Summe von Logarithmen, so muß sie mit Hilfe der früher angeführten Sätze über die Logarithmen in der Weise umgeformt werden, daß auf jeder Seite der Gleichung nur ein einziger Logarithmus auftritt.

Das Verhalten der Potenz als Funktion der Grundzahl oder des Exponenten.

Wir haben gefunden, daß sich für ganzzahlige Werte von $n > 1 > 0$ der Wert $b^n = 1$ ergibt, wenn $b = 1$, und daß $b^n = 0$, wenn $b = 0$. Andererseits ist $b^0 = 1$ und $b^1 = b$. Um aber das Ergebnis dieser Rechnungsoperationen dritter Stufe als Funktion einer Veränderlichen aufzufassen, müssen wir untersuchen, wie sich das Resultat ändert, wenn entweder die Grundzahl oder der Exponent verschiedene Werte annehmen.

Betrachten wir zunächst die $f_1(x) = b^x$ für $b > 1 > 0$. Dann ist $b = 1 + d$, wo $d > 0$ ist, $b^2 = (1 + d)^2 = 1 + 2d + d^2 > 1 + 2d$ und $b^3 = b^2 \cdot b > (1 + 2d)(1 + d) > 1 + 3d$. Es ist aber allgemein $b^n > 1 + nd$, denn für $n = 3$ ist dies eben gezeigt worden, und aus $b^{n+1} = b^n \cdot b > (1 + nd)(1 + d) > 1 + (n + 1)d$ folgt, daß diese Vergleichung auch für alle größeren Werte von n richtig ist.

Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß b^n über alle endlichen Grenzen hinaus wächst, wenn n unbegrenzt zunimmt. Man drückt dies mit den Zeichen aus:

$\lim\limits_{n=\infty} b^n = \infty$, d. h. zu jeder noch so großen Zahl $G > 0$ läßt sich eine Zahl $g > 0$ finden, daß $b^n > G$, wenn $n > g$.

Dies ist der Fall, weil $b^n > G$, wenn $b^n > 1 + nd > G$ und $nd > G$, weil dann auch $1 + nd > G$, mithin ist $b^n > G$, wenn $n > \frac{G}{d} = g$.

Für $0 < b < 1$ sei $b = 1 - d$ und $0 < d < 1$; dann ist $\frac{1}{b} = \frac{1}{1-d} > 1$ und daher $\lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = \infty$. Daraus folgt:

$\lim\limits_{n=\infty} b^n = 0$, **wenn** $0 < b < 1$, **d. h. es läßt sich zu jeder beliebig kleinen Zahl** $\varepsilon > 0$ **eine Zahl** $g > 0$ **angeben, daß** $|b^n| < \varepsilon$, **wenn** $n > g$ **genommen wird.**

Dies folgt aus $b^n = 1 : \left(\frac{1}{b}\right)^n < 1 : G = \varepsilon$. Ist nämlich ε eine beliebig kleine Zahl und $G = \frac{1}{\varepsilon}$, so ist $b^n < \frac{1}{G} = \varepsilon$, wenn $n > \frac{G}{d} = g$ $= \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{d} = \frac{1}{\varepsilon \cdot d}$, wobei $\frac{1}{b} = 1 + d$ und $d = \frac{1}{b} - 1$, also $g = \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{1}{b} - 1\right)}$ $= \frac{b}{\varepsilon\,(1 - b)}$. Wir können also für $0 < b < 1$ zu jedem Werte ε ein solches g berechnen, daß $b^n < \varepsilon$, wenn $n > g$.

Wenn $b < 0$, also negativ ist, so wechselt b^n beim Übergang von geradzahligen zu ungeradzahligen Exponenten sein Vorzeichen, und deshalb würde sich die Untersuchung der Funktion für negative Grundzahlen zu umständlich gestalten, als daß wir sie hier weiter verfolgen könnten.

Für $-n < -1 < 0$, ist $b^{-n} = \frac{1}{b^n} = \left(\frac{1}{b}\right)^n$ und daher

$\lim\limits_{n=\infty} b^{-n} = 0$, **wenn** $b > 1 > 0$ **und** $\lim\limits_{n=\infty} b^{-n} = \infty$, **wenn** $0 < b < 1$.

Um das Verhalten von b^x für $0 < x < 1$ zu untersuchen, setzen wir zunächst $x = \frac{n}{m}$, wobei $n < m$; dann ist $b^x = b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n}$. Für $b > 1 > 0$ ist $b^n > 1 + nd$, wenn $b = 1 + d$. Daher ist auch $b^x > \sqrt[m]{1 + nd} > 1$, denn $\sqrt[m]{1 + nd} = 1$ ist ausgeschlossen, weil sonst $1 + nd = 1^m = 1$ sein müßte, obwohl $d > 0$, aber auch $\sqrt[m]{1 + nd} < 1$ ist unmöglich, weil sonst $1 + nd < 1$ und zugleich $1 + nd > 1$ sein müßte. Es ist also auch für alle rationalen Werte von x, wenn $0 < x < 1$, stets $b^x > 1 > 0$, wenn $b > 1 > 0$.

Desgleichen folgt für rationale Werte von $x > 1$, also für $x = \frac{n}{m}$, wenn $n > m$, daß $b^x = b^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{b^n} > \sqrt[m]{1 + nd} > 1$, weil sich sonst die gleichen Widersprüche einstellen würden.

Alle diese Sätze gelten auch für irrationale Werte von x, die wir als Grenzwerte von rationalen Werten auffassen können, denn

unter dieser Annahme ist auch b^x der Grenzwert der betreffenden Potenzen mit rationalem Exponent.

Wenn endlich $0 < b < 1$, so folgt für $c = \frac{1}{b} > 1 > 0$, daß $c^x > 1 > 0$, ob nun $x > 1 > 0$ oder $0 < x < 1$. Mithin bleibt für $b < 1$ der Wert von $b^x = \frac{1}{c^x} < 1$, ob nun $x > 1 > 0$ oder $0 < x < 1$.

Damit haben wir aber auch schon das Verhalten der Funktion $f_2(x) = x^a$ für alle endlichen Werte von a und x kennen gelernt. Wir wollen noch deren Grenzwerte für $x = 0$ und für $x = \infty$ bestimmen. Es ist:

$$\operatorname*{Lim}_{x=\infty} x^a = \infty, \text{ für } a > 0 \text{ und } \operatorname*{Lim}_{x=\infty} x^a = 0, \text{ wenn } a < 0.$$

Im ersten Falle ist $x^a > x > 1$, wenn $a > 1$, also $a = 1 + d$, weil dann $x^a = x \cdot x^d > x$, denn $x^d > 1$, wenn $x > 1$ und $d > 0$. Wenn also x über alle Grenzen wächst, so gilt dies auch vom noch größeren Werte x^a für $a > 1 > 0$. Aber auch wenn $0 < a < 1$ und $a = \frac{1}{m}$, also $m > 1 > 0$, so ist $\operatorname*{Lim}_{x=\infty} x^a = \operatorname*{Lim}_{x=\infty} x^{\frac{1}{m}} = \operatorname*{Lim}_{x=\infty} \sqrt[m]{x} = \infty$, denn $x = p^m$ kann nur dann über alle Grenzen wachsen, wenn dies auch bei p der Fall ist. Wenn aber a negativ ist, so ist $\operatorname*{Lim}_{x=\infty} \frac{1}{x^a} = 0$, weil der Grenzwert des reziproken Ausdruckes einen unendlich großen Grenzwert hat. Dagegen ist

$$\operatorname*{Lim}_{x=0} x^a = 0, \text{ wenn } a > 0 \text{ und } \operatorname*{Lim}_{x=0} x^a = \infty, \text{ wenn } a < 0.$$

Ersteres folgt daraus, daß für $y = \frac{1}{x}$ der Grenzwert $\operatorname*{Lim}_{y=\infty} y^a = \infty$ und deshalb $\operatorname*{Lim}_{y=\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^a = \operatorname*{Lim}_{x=0} x^a = 0$, wenn $a > 0$. Andererseits ist $\operatorname*{Lim}_{y=\infty} y^a = 0$, wenn $a < 0$ und daher $\operatorname*{Lim}_{y=\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^a = \operatorname*{Lim}_{x=0} x^a = \infty$.

Das Verhalten der Funktion $f_3(x) = \log x$ ergibt sich aus den Eigenschaften der beiden früher besprochenen Funktionen $f_1(x) = b^x$ und $f_2(x) = x^a$. Wenn nämlich $y = \log x$, so ist $e^y = x$. Wir beschränken uns hier auf solche Fälle, wo die Grundzahl des Logarithmensystems größer als 1 ist. Der Einfachheit wegen wählen wir als Grundzahl die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems.

Wegen $e^0 = 1$ ist $\log 1 = 0$, und da $e^1 = e$, so ist $\log e = 1$.

Wenn $y > 0$, so ist wegen $e > 1$ stets $e^y > 1$, und da $\operatorname*{Lim}_{y=\infty} e^y = \infty$, so ist auch $\operatorname*{Lim}_{x=\infty} y = \operatorname*{Lim}_{x=\infty} \log x = \infty$.

Wenn für negative Exponenten $e^{-y} = \frac{1}{e^y} = x$, so muß $\lim_{y=\infty} e^{-y} = \lim_{y=\infty} \frac{1}{e^y} = 0$ sein. Mithin ist $\lim_{x=0} \log x = -\infty$, weil $\log x = -y$.

Durch diese Untersuchungen haben wir einen allgemeinen Überblick über die wechselseitigen Beziehungen der in den Funktionen $f_1(x) = b^x$, $f_2(x) = x^a$ und $f_3(x) = {}^e\log x$ auftretenden Größen gewonnen und gefunden, welchen Grenzwerten sie sich nähern, wenn die unabhängig Veränderliche den Grenzübergang zu Null oder Unendlich ausführt.

Um aber nicht nur die Größe der Funktion für gewisse Werte von x zu finden, sondern auch die Geschwindigkeit ihrer Wertänderung für alle möglichen x-Werte zu bestimmen, müssen wir ihren Differentialquotient als Funktion von x darstellen. Die Integrale dieser Funktionen gestatten dann auch noch, die Zunahme oder Abnahme solcher Funktionen zu berechnen, deren Geschwindigkeitsänderung für die einzelnen Werte von x mit den Funktionswerten der integrierten Funktionen übereinstimmen.

Im Abschnitt über die Logarithmen haben wir den wegen seiner so vielfachen Anwendung außerordentlich wichtigen Satz kennen gelernt, daß $\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = 2{\cdot}71828\ldots\ldots = e$. Mit Hilfe desselben können wir den Differentialquotient von $f_3(x) = {}^e\log x$ berechnen. Dieser ist gleich dem Grenzwert $\lim_{d=0} \frac{\log(x+d) - \log x}{d}$

$$= \lim_{d=0} \frac{1}{d} \cdot \log \frac{x+d}{x} = \lim_{d=0} \log \left(1 + \frac{d}{x}\right)^{\frac{1}{d}} = \lim_{d=0} \log \left(1 + \frac{1}{x:d}\right)^{\frac{x}{d} \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{d=0} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{1}{x:d}\right)^{x:d} = \lim_{z=\infty} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x},$$ weil $\log e = 1$ und für $x:d = z$ der Grenzwert $\lim_{d=0}\left(1 + \frac{1}{x:d}\right)^{x:d}$ in $\lim_{z=\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e$ übergeht, da $\lim z = \lim_{d=0} \frac{x}{d} = \infty$.

Es ist demnach für $f_3(x) = \log x$ der Differentialquotient

$$f'_3(x) = \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Daraus ergeben sich auch die Differentialquotienten der Funktionen $y_1 = f_1(x) = b^x$ und $y_2 = f_2(x) = x^a$.

Wir betrachten zunächst $\log b^x$ als eine zusammengesetzte Funktion von x und setzen $\log y_1 = F(y_1)$ und $y_1 = b^x$. Dann be-

nützen wir den Satz über die Differenzierung der zusammengesetzten Funktionen, daß $\frac{dF(y)}{dx} = \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. In unserem Falle ist $\frac{dF(y_1)}{dy_1} = \frac{d(\log b^x)}{db^x} = \frac{1}{b^x}$ und wegen $\log b^x = x \cdot \log b$ ist zugleich $\frac{dF(y_1)}{dx} = \frac{d(x \log b)}{dx} = \log b \cdot \frac{d(x)}{dx} = \log b$. Es ist demnach $\frac{dF(y_1)}{dx} = \frac{dF(y_1)}{dy_1} \cdot \frac{d(b^x)}{dx} = \frac{1}{b^x} \cdot \frac{d(b^x)}{dx} = \log b$, und daher

$$f'_1(x) = \frac{d(b^x)}{dx} = b^x \cdot \log b,$$

wobei nur vorausgesetzt ist, daß $b > 0$, da wir Potenzen mit negativen Grundzahlen von unseren Untersuchungen ausschließen. b kann also jede beliebige positive und x jede reelle Zahl sein.

Setzen wir $y_2 = f_2(x) = x^a$ und $F(y_2) = \log y_2 = \log x^a = a \cdot \log x$, so finden wir einerseits $\frac{dF(y_2)}{dx} = a \cdot \frac{d(\log x)}{dx} = a \cdot \frac{1}{x}$; andererseits ist $\frac{dF(y_2)}{dy_2} = \frac{d(\log x^a)}{dx^a} = \frac{1}{x^a}$ und daher $\frac{dF(y_2)}{dx} = \frac{dF(y_2)}{dy_2} \cdot \frac{d(x^a)}{dx} = \frac{1}{x^a} \cdot \frac{d(x^a)}{dx} = a \cdot \frac{1}{x}$. Hieraus können wir den gesuchten Differentialquotient $\frac{d(x^a)}{dx}$ berechnen und finden $\frac{d(x^a)}{dx} = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x}$; also ist

$$f'_2(x) = \frac{d(x^a)}{dx} = a \cdot x^{a-1}.$$

Wir haben schon früher gefunden, daß $\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$, aber die Ableitung dieser Formel geschah damals unter der Voraussetzung, daß n eine natürliche Zahl sei, während die unmittelbar vorhergehende Ableitung ganz allgemein ist und daher auch für gebrochene und irrationale Werte von a und x gilt.

Aus diesen Formeln lassen sich endlich auch die ihnen entsprechenden unbestimmten und bestimmten Integrale ableiten.

Da $\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x}$, so ist das unbestimmte Integral $\int \frac{1}{x} dx = \log x$ und das bestimmte Integral innerhalb der Grenzen x_1 und x_2 $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = \log x_2 - \log x_1$.

Ferner folgt aus $\frac{d\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)}{dx}=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{d\,(x^{a+1})}{dx}=\frac{a+1}{a+1}\cdot x^a=x^a$, daß $\int x^a\,dx=\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}$ und endlich, da $\frac{d\left(\frac{b^x}{\log b}\right)}{dx}=\frac{1}{\log b}\cdot\frac{d\,b^x}{dx}$ $=\frac{\log b}{\log b}\cdot b^x=b^x$. Mithin ist $\int b^x\,dx=\frac{1}{\log b}\cdot b^x$ und das bestimmte Integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} b^x\cdot dx=\frac{1}{\log b}(b^{x_2}-b^{x_1})$.

Mit Hilfe dieser Integrale läßt sich die einem Intervall x_2-x_1 der unabhängigen Veränderlichen x entsprechende Veränderung auch für eine solche Funktion berechnen, von der wir nur wissen, daß ihre Änderungsgeschwindigkeit durch die unter dem Integralzeichen stehende Funktion dargestellt wird.

Die Ableitung von Funktionen aus ihren Eigenschaften.

Vielfach läßt sich aus den arithmetischen Eigenschaften einer Funktion deren Form direkt ableiten und durch die uns bekannten Funktionen darstellen.

Gehen wir von den Operationen erster und zweiter Stufe aus, so können wir aus der Eigenschaft der Funktion, die das Distributivgesetz der Multiplikation zum Ausdruck bringt, den Satz beweisen:

Wenn $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, dann ist $f(x)=a\cdot x$, wenn $f(1)=a$ ein endlicher Wert ist.

Aus $f(1+0)=f(1)+f(0)$ folgt $f(1)=f(1)+f(0)$ und $f(0)=f(1)-f(1)=a-a=0$. Aus $x_1=x_2$ folgt $f(x_1+x_1)=f(2\,x_1)=f(x_1)+f(x_1)=2\,f(x_1)$; weil also für $n=2$ die Regel gilt $f(n x_1)=n\cdot f(x_1)$, so gilt dieselbe allgemein, da sie auch für $n+1$ zutrifft. $f[(n+1)\,x_1]=f(n x_1+x_1)=f(n x_1)+f(x_1)=n\cdot f(x_1)+f(x_1)=(n+1)\cdot f(x_1)$. Wegen $f(x_1-x_1)=f(0)=0=f(x_1)+f(-x_1)$ ist $f(-x_1)=-f(x_1)$, und deshalb gilt die Regel $f(n\,x_1)=n\cdot f(x_1)$ auch für alle negativen Werte von n. Aber auch für $\frac{m}{n}$ erhalten wir $f\left(\frac{m}{n}\cdot x_1\right)=\frac{m}{n}f(x_1)$, denn es ist $n\,f\left(\frac{m}{n}\,x_1\right)=f\left(n\cdot\frac{m}{n}\cdot x_1\right)=f(m\,x_1)$

$= m f(x_1)$ und $f\left(\frac{m}{n}\cdot 1\right) = \frac{m}{n} f(1) = \frac{m}{n}\cdot a = x\cdot a.$ Die Formel gilt demnach für alle rationalen Werte von x und, da der Grenzwert eines Produktes gleich dem Produkte der Grenzwerte der Faktoren ist, auch für irrationale Zahlen, wenn die rationalen Faktoren sich einem irrationalen Grenzwerte nähern.

In ähnlicher Weise können wir auch für die Operationen dritter Stufe zeigen, daß nur die durch sie dargestellten Funktionen folgende Eigenschaften besitzen:

Wenn $f(x_1 + x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$, dann ist $f(x) = b^x$, falls $f(1) = b$ einen endlichen Wert hat.

Aus $f(1+0) = f(1) = f(1)\cdot f(0)$ folgt $f(0) = \frac{f(1)}{f(1)} = \frac{b}{b} = 1.$ Wegen $f(x_1 - x_1) = f(0) = 1 = f(x_1)\cdot f(-x_1)$ ist $f(-x_1) = \frac{1}{f(x_1)} = [f(x_1)]^{-1}$. Weil $f(2) = f(1+1) = f(1)\cdot f(1) = b^2$, so gilt die Regel $f(n) = b^n$ allgemein, denn sie gilt für $n = 2$ und auch für jede nächsthöhere Zahl, da $f(n+1) = f(n)\cdot f(1) = b^n\cdot b = b^{n+1}$. Aus $f\left(n\cdot\frac{m}{n}\right) = f(m) = b^m = \left[f\left(\frac{m}{n}\right)\right]^n$ folgt $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{b^m} = b^{\frac{m}{n}}$. Die Formel $f(x) = b^x$ gilt mithin für positive und negative, ganze und gebrochene, also für alle rationalen Werte von x und als Grenzwert auch für irrationale x.

Wenn $f(x_1\cdot x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$, so ist $f(x) = x^a$, falls es einen Wert $x = e > 1 > 0$ gibt, für den $f(e) = p > 1 > 0$ und $p = e^a$ oder $a = {}^e\log p$.

Unter dieser Annahme ist $f(e\cdot 1) = f(e) = f(e)\cdot f(1)$ und daher $f(1) = \frac{f(e)}{f(e)} = \frac{p}{p} = 1$, und aus $f(e\cdot 0) = f(0) = f(e)\cdot f(0) = p\cdot f(0)$ folgt $f(0)\cdot(p-1) = 0$, weshalb $f(0) = 0$ sein muß, da $p - 1 > 0$ angenommen wurde.

Für alle ganzzahligen Werte von n ist $f(x^n) = [f(x)]^n$, weil dies wegen $f(x\cdot x) = f(x^2) = f(x)\cdot f(x) = [f(x)]^2$ für $n = 2$ gilt und wegen $f(x^{n+1}) = f(x^n\cdot x) = f(x^n)\cdot f(x) = [f(x)]^n\cdot f(x) = [f(x)]^{n+1}$ auch für jeden um 1 größeren Wert von n gilt.

Aus $f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = f(1) = 1 = f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ ergibt sich $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, somit $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$ und $f\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{1}{f(x^n)}$, daher auch $f(x^{-n}) = [f(x)]^{-n}$. Die Regel $f(x^n) = [f(x)]^n$ gilt also auch für negative

Werte von n. Daß sie auch für gebrochene und als Grenzwerte auch für irrationale Werte von a gilt, folgt aus

$$f(x^{\frac{m}{n}}) = [f(x)]^{\frac{m}{n}}, \text{ weil } [f(x^{\frac{m}{n}})]^n = f(x^{n \cdot \frac{m}{n}}) = f(x^m) = [f(x)]^m.$$

Wenn nun $f(e) = p$, so können wir p als eine Potenz von e darstellen, indem wir $p = e^{\log p} = e^a$ setzen, wobei sich der Logarithmus auf die Grundzahl e beziehen möge. Wir können aber auch jede beliebige Zahl x als eine Potenz von e darstellen und x durch den gleichwertigen Ausdruck $e^{\log x}$ ersetzen. So erhalten wir $f(x) = f(e^{\log x}) = p^{\log x} = e^{\log p \cdot \log x} = e^{\log x \cdot \log p} = x^{\log p} = x^a$, und es ist $f(x) = x^a$.

Endlich läßt sich noch der Satz aufstellen:

Wenn $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, so ist $f(x) = \log x$, falls $f(e) = 1$ und $e > 1 > 0$.

Aus $f(e \cdot 1) = f(e) = f(e) + f(1)$ folgt $f(1) = f(e) - f(e) = 1 - 1 = 0$. Aber wegen $f(e \cdot 0) = f(0) = f(e) + f(0)$ und $f(e) = 1 = f(0) - f(0)$ kann $f(0)$ nicht Null sein und auch keinen endlichen Wert besitzen.

Weil ferner $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2 f(x)$, so gilt die Regel $f(x^n) = n \cdot f(x)$ für $n = 2$ und wegen $f(x^{n+1}) = f(x^n \cdot x) = f(x^n) + f(x) = n \cdot f(x) + f(x) = (n+1) \cdot f(x)$ gilt sie auch für jeden größeren ganzzahligen Wert von n. Es ist aber $f(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n} \cdot f(x)$, da $n \cdot f(x^{\frac{m}{n}}) = f(x^{n \cdot \frac{m}{n}}) = f(x^m) = m \cdot f(x)$. Mithin besteht die Regel $f(x^a) = a \cdot f(x)$ auch für rationale und als Grenzwert rationaler Werte auch für irrationale Werte von a.

Aus $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ ergibt sich, daß $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x^{-1}) = -f(x)$ und $f\left(\frac{1}{x^n}\right) = f(x^{-n}) = -n \cdot f(x)$, daß dieselbe Regel auch für negative Werte von a richtig ist. Setzen wir wieder $x = e^{\log x}$, so folgt hieraus $f(x) = f(e^{\log x}) = \log x \cdot f(e) = \log x \cdot 1 = \log x$.

Imaginäre und komplexe Zahlen.

Die Berechnung der Quadratwurzel eines Radikanden, der nicht genau das Quadrat einer ganzen Zahl ist, hat zur Erweiterung des Zahlengebietes um die irrationalen Zahlen geführt. Diesen Schritt haben schon die Mathematiker des Altertums getan, obwohl ihnen die Darstellung der neuen Zahlen große Schwierigkeiten bereitete,

und auch wir sind darauf angewiesen, dieselben nur als Grenzwerte rationaler Zahlen zu behandeln. Die Berechnung der Quadratwurzel führt aber noch zu einer zweiten Erweiterung des Zahlbegriffes, der den antiken Mathematikern verschlossen blieb und bleiben mußte, weil sie schon die negativen Zahlen in ihren Rechnungen vermieden und durch passende Umformungen der Aufgaben umgingen. Diesen Schritt wagten erst die italienischen Mathematiker der Renaissance, zur Zeit der großen Entdeckungsreisen und des mächtigen Aufschwunges der Kunst und Wissenschaft. Der in Mailand und Bologna lehrende Cardano (1501—1576) hält zwar zuerst die Lösung einer Gleichung, bei der aus einer negativen Zahl die Wurzel gezogen werden soll, für unmöglich, später aber belegt er dieselbe doch mit einem eigenen Ausdruck und rechnet „per radicem minus". Raphael Bombelli nennt $+\sqrt{-a}$ „piu di meno", d. h. er spricht von einem „positiven Negativ-Sein" und $-\sqrt{-a}$ heißt bei ihm „meno di meno", das man als ein „negatives Negativ-Sein" hinstellen könnte. Der hervorragende holländische Mathematiker und Mechaniker Stevin steht diesem neuen Begriff noch ratlos gegenüber. Der berühmte französische Philosoph und Mathematiker Descartes erklärt in seiner Geometrie (1637), daß man sich von einer solchen Größe keine Vorstellung machen könne, und Newton erkennt die imaginären Gleichungswurzeln als solche nicht an. Erfolgreicher betreten dieses Gebiet der so vielseitig bahnbrechende deutsche Forscher Leibniz, die beiden Engländer Maclaurin und de Moivre, Leonhard Euler in Berlin und später in Petersburg, d'Alembert in Paris und besonders der große Göttinger Mathematiker C. F. Gauss, welcher für die Einheit der imaginären Zahlen der bereits von Euler gewählten Bezeichnung $\sqrt{-1} = i$ zur allgemeinen Anerkennung verhalf. Nebst andern späteren Mathematikern, welche sich um die Theorie dieser so langsam und zögernd, aber auch epochemachenden Erweiterung des Zahlbegriffes besonders verdient gemacht haben, sind vor allen Cauchy (1857) in Paris und Weierstrass (1897) in Berlin hervorzuheben.

Da nicht nur die Quadrate aller positiven, sondern auch aller negativen Zahlen positiv sind, kann $\sqrt{-a}$, falls „$-a$" eine negative Zahl bedeutet, weder eine positive noch eine negative Zahl sein, $\sqrt{+a}$ dagegen sowohl eine positive, als auch eine negative Zahl darstellen. Während demnach alle bisher durchgenommenen Rechnungsoperationen eindeutig waren, erscheint die Quadratwurzel einerseits als eine „mehrdeutige Funktion" der unter dem Wurzelzeichen stehenden Veränderlichen, andererseits hat sie aber für

negative Radikanden keinen Sinn, falls wir nicht eine neue Erweiterung des Zahlbegriffes vornehmen, die auch Zahlen von der Form $\sqrt{-a}$ und deren Einheit $\sqrt{-1} = i$ umfaßt.

Wegen $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = |\sqrt{a}| \cdot \sqrt{-1} = |\sqrt{a}| \cdot i$ können wir die Wurzel aus jeder von -1 verschiedenen negativen Zahl als das Produkt einer absoluten Wurzel $|\sqrt{a}|$ und der so eingeführten Einheit auffassen. Es empfiehlt sich daher, unter $\sqrt{a}$ stets nur die absolute, d. h. den positiven Wert dieser Wurzel zu verstehen und in jedem andern Falle die Zweideutigkeit oder den negativen Wert durch die Vorzeichen als solchen kenntlich zu machen.

Wie sich die positiven und negativen, die rationalen und irrationalen Vielfachen der positiven Einheit „reduzieren", d. h. als Produkt eines einzigen Koeffizienten und der Einheit darstellen lassen, so gilt dies auch für alle Vielfachen der neuen Einheit, die wir fortan als die „imaginäre" bezeichnen, während im Gegensatz zu ihr die positive und negative Einheit „reell" heißen sollen.

Wie wir $5 + \frac{3}{4} - 2 = 3\frac{3}{4}$ setzen, so sei auch $5i + \frac{3}{4}i - 2i = 3\frac{3}{4}i$.

Obwohl wir die reellen und imaginären Zahlen nicht als Vielfache derselben Einheit darstellen können, lassen sich doch beide Zahlenarten zu einer Summe vereinigen, die größer ist als jeder ihrer Summanden. Da diese Summe weder als eine reelle, noch als eine imaginäre Zahl aufgefaßt werden kann, so bezeichnen wir sie nach Gauss als eine aus beiden Zahlenarten „zusammengesetzte", also als eine „komplexe Zahl". Auch mit Ausdrücken von der Form $a + bi$, also z. B. mit der komplexen Zahl $3 + 4i$ können wir rechnen, wie mit den Summen anderer Zahlen, wenn die dabei zu beachtenden Regeln dieselben sind, wie diejenigen der allgemeinen Zahlen.

Wir stellen zunächst fest, wann zwei solche Zahlen einander gleich sein sollen und sagen:

Zwei komplexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ sind einander gleich, wenn $a = c$ und $b = d$.

Diese Regel entspricht allen Anforderungen, die für die Feststellung der Gleichheit erforderlich sind.

Die **Addition** und **Subtraktion** definieren wir folgendermaßen:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \text{ und}$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Die Summe ist kommutativ und assoziativ, weil auch die Koeffizienten der reellen und imaginären Einheit kommutative und assoziative Summen sind.

Bei der Bildung des Produktes kommt das Distributivgesetz zur Geltung:

Es ist demnach $(a+bi)\cdot c = ac+bci$ und $(a+bi)\cdot di = adi+bdi^2 = -bd+adi$. Dabei geben zwei reelle Faktoren, wie sie bisher allgemein verwendet wurden, ein reelles Produkt; das Produkt einer imaginären und einer reellen Zahl ist imaginär, weil durch eine solche Multiplikation nur der Koeffizient der imaginären Einheit vervielfacht wird und das Produkt zweier imaginärer Zahlen ist reell, weil sie zur Bildung des Quadrates der imaginären Einheit führt, die ja durch Radizierung einer reellen, nämlich der negativen Einheit entstanden ist.

Die **Multiplikation** zweier komplexer Zahlen führt daher zum Resultat: $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$.

Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist somit wieder eine komplexe Zahl, wenn weder $ac-bd$ noch $ad+bc$ gleich Null ist. Falls dagegen $ac-bd=0$, so ist das Produkt imaginär, und es ist reell, wenn $ad+bc=0$. Letzteres trifft aber zu, wenn die Proportion besteht: $c:a = -d:b$ und mithin $c=a\cdot k$ und $d=-b\cdot k$. Dann ist $c+di=(a-bi)k$, und wegen $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ist unter obiger Annahme $(a+bi)(c+di) = (a+bi)(a-bi)k = (a^2+b^2)k$.

Zwei komplexe Zahlen von der Form $a+bi$ und $a-bi$ bezeichnet man nach Gauss als „konjugiert komplexe Zahlen", und ihr Produkt $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ist reell.

Weierstrass hat aus diesem Produkt zuerst den Begriff des „absoluten Wertes einer komplexen Zahl" abgeleitet. Als solchen stellt er den Ausdruck $|\sqrt{a^2+b^2}|$ hin, der immer positiv ist, gleichviel ob a und b positiv oder negativ sind, wie ja auch der absolute Wert der relativen Zahlen $+3$ und -3 von deren Vorzeichen unabhängig ist. Man bezeichnet demnach den „absoluten Wert" der komplexen Zahl $\pm a \pm bi$ mit $|\pm a \pm bi|$ und setzt demnach $|\pm a \pm bi| = |\sqrt{a^2+b^2}|$.

Für $b=0$ geht derselbe in den absoluten Wert des reellen und für $a=0$ in den absoluten Wert des imaginären Teiles über. Da ferner $|\sqrt{a^2+b^2}| > |a|$, wenn b nicht Null ist, und $|\sqrt{a^2+b^2}| > |b|$, wenn a nicht Null ist, so ist der absolute Wert der komplexen Zahl größer als der absolute Wert jedes seiner Bestandteile. Deshalb müssen wir $a+bi$ als eine wirkliche Summe und nicht nur als eine einfache Nebeneinanderstellung einer reellen und einer imaginären Zahl auffassen. Damit der absolute Wert der komplexen Zahl $a+bi$ der Einheit gleich sei, muß $\sqrt{a^2+b^2}=1$ und

daher sowohl $|a| < 1$ als auch $|b| < 1$ sein. Andererseits ist $|\pm 1 \pm i| = |\sqrt{1^2 + 1^2}| = |\sqrt{2}| = 1{\cdot}41421\ldots$ Die aus der reellen und imaginären Einheit gebildete komplexe Zahl hat also nicht den absoluten Wert 1, und wenn der absolute Wert einer komplexen Zahl gleich 1 ist, so kann weder der reelle noch der imaginäre Teil zugleich 1 sein.

Der Quotient zweier komplexer Zahlen ist im allgemeinen wieder eine komplexe Zahl, denn es ist $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$ $= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$

Aus $i^2 = -1$ folgt durch beiderseitige Multiplikation mit i der Reihe nach: $i^3 = -i$, $i^4 = -i^2 = +1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1$, $i^7 = i^{4+3} = -i$, $i^{4n} = (i^4)^n = 1$, $i^{4n+m} = i^{4n} \cdot i^m = i^m$.

Potenzen komplexer Zahlen sind gewöhnlich komplexe Zahlen, weil auch die Produkte komplexer Zahlen wieder komplex sind. Es ist also $(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi$. Es ist aber auch $(-a - bi)^2 = (-a - bi)(-a - bi) = (a^2 - b^2) + 2abi$. Mithin hat nicht nur jede positive Zahl a eine positive und eine negative Quadratwurzel, $+|\sqrt{a}|$ und $-|\sqrt{a}|$ und jede negative Zahl $-a$ zwei imaginäre Wurzeln $+\sqrt{a} \cdot i$ und $-\sqrt{a} \cdot i$, sondern auch jede komplexe Zahl zwei komplexe Wurzeln, z. B. $c + di$ die Wurzeln $+(a + bi)$ und $-(a + bi)$, wenn $c = a^2 - b^2$ und $d = 2abi$.

Bei Berücksichtigung aller komplexen Wurzeln ergeben sich für jede n-te Wurzel einer reellen oder komplexen Zahl n verschiedene Wurzeln. Die n-te Wurzel ist also eine „n-deutige Funktion", und nur die positive n-te Wurzel einer positiven Zahl kann als „eindeutige Funktion" betrachtet werden, weil jede größere Zahl als diese Wurzel eine größere n-te Potenz besitzt, als der Radikand darstellt, und jede kleinere Zahl eine kleinere Potenz ergibt.

Die Gleichheitsdefinition für komplexe Zahlen führt durch Umkehrung zu folgendem wichtigen Satz:

Wenn zwei komplexe Zahlen einander gleich sind, so ist der reelle Teil der einen gleich dem reellen Teil der anderen und der imaginäre Teil der einen gleich dem imaginären Teil der anderen Zahl.

Bilden wir nämlich die Differenz beider Zahlen, so muß deren absoluter Betrag gleich Null sein. Es ist nämlich $a + bi = c + di$, wenn $|(a - c) + (b - d)i| = |\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}| = 0$, und dies ist nur möglich, wenn $a - c = 0$ und $b - d = 0$, wenn also $a = c$ und $b = d$.

Ist z. B. $x + yi = 3$, so muß $x = 3$ und $y = 0$ sein, weil rechts vom Gleichheitszeichen kein imaginärer Bestandteil auftritt. Ebenso folgen aus der einzigen Gleichung zwischen zwei komplexen Zahlen $(x + 4) + (y - 7)i = 8 + 3i$, daß die beiden Gleichungen bestehen $x + 4 = 8$ und $y - 7 = 3$. Wir können daher den Satz aufstellen:

Aus jeder Gleichung zwischen zwei komplexen Zahlen lassen sich zwei Gleichungen zwischen reellen Zahlen ableiten, indem wir die reellen Teile den reellen und die imaginären den imaginären Teilen gleichsetzen.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

In den Schriften der Mathematiker des griechischen Altertums finden sich viele Aufgaben, welche darauf schließen lassen, daß sie quadratische Gleichungen, sei es auf geometrischen Wegen oder durch uns unbekannt gebliebene arithmetische Methoden aufzulösen wußten. Dafür sprechen das auf die Leistungen der pythagoräischen Schule zurückgreifende Werk Euklids, die Arbeiten des Archimedes und des Heron von Alexandrien, aber erst der dem 3. oder 4. Jahrhundert n. Chr. angehörige Diophant bringt rein arithmetische Lösungsformen, die auf drei Grundformen zurückgeführt werden. Die indischen Mathematiker, wie Brahmagupta im 6. Jahrhundert, scheinen von ihnen abhängig zu sein, betonen aber zum erstenmal auffallend, daß solche Gleichungen zwei Lösungen oder „Wurzeln" zulassen. Durch Vermittlung der Araber, besonders des Muhammed ibn Musa, gelangten ihre Lösungsmethoden nach Italien und von hier nach Deutschland und Frankreich. In den Werken des Leonardo von Pisa (Liber abaci 1202), des Deutschen Jordanus Nemorarius († 1237, Algorithmus demonstratus), des Franzosen N. Chuquet (Le Triparty, 1484) und des Italieners Luca Paciuolo in Florenz (Summa, 1494) zeigt sich das lebhafte Bestreben, alle möglichen Fälle zu erschöpfen und dabei doch negative und imaginäre Zahlen zu vermeiden. Widmann von Eger (1489) und Adam Riese (1524) halten an ihren hergebrachten 24 verschiedenen Fällen fest. Aber bei Christoph Rudolf von Jauer (Goß, 1525) und Michael Stifel (Arithmetica integra, 1544) zeigt sich endlich wieder das Streben nach einer einheitlichen Form der Lösung, was jedoch erst durch die Einführung der negativen und imaginären Zahlen möglich wurde. Diesen Schritt hat, wie wir schon bei der Lehre von den imaginären Zahlen erfahren haben,

Cardano in Bologna in seiner „ars magna" (1545) getan, und damit den Grund zu einer alle Spezialfälle umfassenden, vollständig einheitlichen Lösung gelegt.

Wie wir bei der Auflösung der Gleichung ersten Grades einen Wert x gesucht haben, für welchen die lineare Funktion $ax+b$ entweder irgend einen gegebenen Wert annimmt oder gleich Null ist, so gehen wir auch bei Lösung der quadratischen Gleichungen darauf aus, die unabhängig Veränderliche x der quadratischen Funktion Ax^2+Bx+C so zu wählen, daß dieser Ausdruck irgend einen bestimmten Wert oder speziell den Wert Null annimmt. Ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen, können wir uns auf den letzteren Fall beschränken, denn wenn $Ax^2+Bx+C=D$ sein soll, so führt uns dies zur Lösung der Aufgabe $Ax^2+Bx+(C-D)=0$, also wieder zur Lösung einer Gleichung von der Form $Ax+Bx+C'=0$. Wir können ferner noch eine zweite Vereinfachung vornehmen, ohne die allgemeine Verwendbarkeit des gewonnenen Resultates einzuschränken, indem wir von der Funktion $x^2+ax+b=0$ ausgehen, denn diese Gleichung muß dieselben Lösungen haben wie $Ax^2+Bx+C=0$, wenn Ax^2+Bx+C $=A\left(x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)=A(x^2+ax+b)$ gesetzt wird. Da wir nämlich voraussetzen müssen, daß A nicht Null ist, so kann Ax^2+Bx+C nur dann Null sein, wenn $x^2+ax+b=0$. Wenn diese Gleichung für einen Wert von x erfüllt ist, so ist dieser auch eine Wurzel von $Ax^2+Bx+C=0$.

Soll die Lösung der quadratischen Gleichungen in allgemein gültiger Form dargestellt werden, so müssen in der Gleichung $x^2+ax+b=0$ die beiden Buchstaben a und b jeden beliebigen Wert annehmen, also sowohl positiv, wie auch Null und negativ sein können. Den Ausgangspunkt zur Lösung der quadratischen Gleichung bildet die Bestimmung einer Zahl y, deren Quadrat einen vorgegebenen Wert c haben soll, und fällt daher mit der Berechnung der Quadratwurzel zusammen. Soll demnach $y^2=c$ sein, so muß $y=\pm\sqrt{c}$ gesetzt werden, wobei $\sqrt{c}$ die absolute Wurzel bedeutet, wenn c positiv, und wir erhalten zwei imaginäre Lösungen, wenn c negativ ist. Auf diesen Fall läßt sich unsere Aufgabe zurückführen, wenn wir die quadratische Funktion, welche die Unbekannte x enthält, als einen Teil eines vollständigen Quadrates auffassen. Da $(x+m)^2=x^2+2mx+m^2$, so stimmt dieser Ausdruck mit x^2+ax+b in den beiden ersten Gliedern überein, wenn $2m=a$ und daher $m=\frac{a}{2}$. Soll demnach $x^2+ax=-b$ sein, so ist das vollständige

Quadrat $x^2 + 2mx + m^2 = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ und $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Die allgemein gültige Lösungsformel ist mithin die folgende:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Da unter dem Wurzelzeichen eine Differenz auftritt, so kann der Radikand positiv oder negativ und daher die Wurzel reell oder imaginär, bzw. der Lösungswert x reell oder komplex sein. Letzteres ist der Fall, wenn $b > \frac{a^2}{4} > 0$. Dann ist

$$x = -\frac{a}{2} \pm i \cdot \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}.$$

Die Entscheidung, ob wir für x einen reellen oder komplexen Wert erhalten, hängt mithin vom Vorzeichen des Ausdruckes $\frac{a^2}{4} - b = \frac{a^2 - 4b}{4}$, bzw. vom Wert des Zählers $a^2 - 4b$ ab. Wenn wir von der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ ausgehen und daher $a = \frac{B}{A}$ und $b = \frac{C}{A}$ setzen, so entscheidet das Vorzeichen des Zählers $\frac{B^2 - 4AC}{A^2}$ also $B^2 - 4AC$, den man deshalb als die **Diskriminante** bezeichnet. Da sich zwei komplexe Wurzeln nur im Vorzeichen des imaginären Teiles unterscheiden, so bilden dieselben zwei „konjugiert komplexe Zahlen".

An die ältere Behandlungsform der Gleichungen erinnert noch die Einteilung der quadratischen Gleichungen in „rein quadratische", bei welchen $a = 0$ ist, und in „gemischt quadratische", wenn $a \gtrless 0$. Im ersten Fall ergibt die allgemeine Lösungsform $x = \pm\sqrt{-b}$, worauf dann wieder die Fälle unterschieden wurden, ob $-b$ positiv oder negativ und dementsprechend x reell oder imaginär ist. Außerdem verdienen noch die beiden speziellen Fälle hervorgehoben zu werden, wenn $b = 0$ und wenn $a^2 - 4b = 0$ ist. Wenn $b = 0$, so hat die Gleichung die Form $x^2 + ax = 0$, und es ergeben sich aus der allgemeinen Lösungsformel die beiden Lösungen $x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 0$

$x = -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} = -a$. Wenn dagegen $a^2 - 4b = 0$, so erhalten wir nur eine Lösung $x = -\frac{a}{2}$, was damit zusammenhängt, daß dann das Gleichungstrinom $x^2 + ax + b$ ein vollständiges Quadrat ist, da ja $b = \frac{a^2}{4}$ und daher $x^2 + ax + b = x^2 + 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{4}\right)^2$.

Die vollkommen allgemeine Lösungsform der quadratischen Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ ermöglicht zugleich die algebraischen Eigenschaften der quadratischen Funktion von x näher kennen zu lernen.

Ist x_1 eine Wurzel der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ und daher $x_1^2 + ax_1 + b = 0$, so nennt man die Differenz $x - x_1$ einen Wurzelfaktor des Trinoms $x^2 + ax + b$, und es besteht der Satz:

Die quadratische Funktion $x^2 + ax + b$ ist durch beide Wurzelfaktoren der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ teilbar.

Die Ausführung der Division ergibt:

$$\begin{array}{l}
(x^2 + ax + b) : (x - x_1) = x + (x_1 + a) \\
\underline{\pm x^2 \mp x_1 x} \\
\quad (x_1 + a)x + b \\
\underline{\pm (x_1 + a)x \mp x_1^2 \mp a x_1} \\
\qquad\qquad x_1^2 + a x_1 + b = 0.
\end{array}$$

Diese Division geht auf, weil der Voraussetzung zufolge der Ausdruck, welcher den Rest darstellt $x_1^2 + ax_1 + b = 0$ und deshalb $x^2 + ax + b = (x - x_1)[x + (x_1 + a)] = (x - x_1)(x - x_2)$, wenn wir $x_1 + a = -x_2$ setzen. Der Ausdruck $x^2 + ax + b$ ist also nicht nur dann gleich Null, wenn $x = x_1$, sondern auch für $x = -(x_1 + a) = x_2$. Aus $-x_1 - a = x_2$ folgt aber $x_1 + x_2 = -a$ und aus $x_1^2 + ax_1 + b = 0$ folgt $b = -x_1^2 - ax_1 = -x_1^2 + (x_1 + x_2)x_1 = -x_1^2 + x_1^2 + x_1 x_2 = x_1 \cdot x_2$. Daraus ergibt sich der Satz:

Jede Funktion zweiten Grades von der Form $x^2 + ax + b$ läßt sich in zwei solche Faktoren ersten Grades $x - x_1$ und $x - x_2$ zerlegen, daß der negativ genommene Koeffizient a gleich der Summe der beiden Gleichungswurzeln x_1 und x_2 und b dem Produkte derselben gleich ist.

Der Funktionswert von $f(x) = x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$ ist für jeden zwischen x_1 und x_2 liegenden Wert von x negativ, weil der eine Faktor negativ, der andere aber positiv ist, wenn $x_1 < x < x_2$. Liegt x nicht zwischen diesen beiden Grenzen, dann sind entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ. Weil endlich im Ausdruck $x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4}$ nur der Minuend ver-

änderlich ist, so erreicht derselbe seinen kleinsten Wert oder sein Minimum dann, wenn $x+\frac{a}{2}=0$, also für $x=-\frac{a}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}$. Ist die Diskriminante $D=\frac{a^2-4b}{4}$ negativ und daher $-D=\frac{4b-a^2}{4}$ positiv, so kann der nur aus positiven Gliedern bestehende Ausdruck $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(-D)$ für keinen reellen Wert, also nur für imaginäre oder komplexe Werte von x Null oder negativ sein.

Mit Hilfe der quadratischen Gleichungen können wir zunächst solche Aufgaben über Maxima und Minima lösen, bei welchen sich die zu untersuchende Funktion durch eine Funktion zweiten Grades darstellen läßt. $f(x)=x^2+ax+b$ nimmt nämlich seinen kleinsten und $-f(x)$ seinen größten Wert an, wenn $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, und dieser ist also $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+a\frac{x_1+x_2}{2}+b=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

Die Maxima und Minima der Funktionen dritten Grades lassen sich bestimmen, indem wir die Werte von x berechnen, für welche der Differentialquotient derselben gleich Null ist. Da dieser bei Funktionen dritten Grades zu einer quadratischen Gleichung führt, so erhalten wir zwei, aber auch nur zwei in Betracht kommende Werte von x. Ist $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ und daher $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, so folgt aus $3ax^2+2bx+c=0$ oder $x^2+\frac{2b}{3a}x+\frac{c}{3a}=0$, daß $x=-\frac{b}{3a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{9a^2}-\frac{c}{3a}}=\frac{1}{3a}(-b\pm\sqrt{b^2-3ac})$.

Für $f(x)=3x^3+5x^2+x+7$ ist z. B. $f'(x)=9x^2+10x+1$ und $x=\frac{1}{9}(-5\pm\sqrt{16})=\frac{1}{9}(-5\pm4)$, also $x_1=-\frac{1}{9}$, $x_2=-1$. Für $x=-2$ erhalten wir $f(-2)=-24+20-2+7=1$, ferner ist $f(-1)=-3+5-1+7=8$, und $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}-\frac{1}{2}+7=7\frac{3}{8}$, $f\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{3}{729}+\frac{5}{81}-\frac{1}{9}+7=6\frac{230}{243}$, $f(0)=7$. $f(-1)=8$ ist ein Maximum, weil die benachbarten Werte, wie z. B. $f(-2)$, $f(0)$ und $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ kleiner sind als 8 und $f\left(-\frac{1}{9}\right)=6\frac{230}{243}$ ist ein Minimum, weil die benachbbarten Werte größer sind. Andere Maxima und Minima kommen hier nicht vor, weil $9x^2+10x+1=f'(x)$ nur für diese Werte Null wird.

Algebraische Gleichungen höheren Grades mit einer Unbekannten.

Die allgemeine Lösung der Gleichungen zweiten Grades ermöglicht zunächst die Auflösung solcher Gleichungen höherer Grade, die sich auf die Form von Gleichungen zweiten Grades zurückführen lassen.

Die Gleichung $x^{2n} + a x^n + b = 0$ läßt sich auf die Gleichung $y^2 + a y + b = 0$ zurückführen, wenn wir $x^n = y$ setzen. Sind y_1 und y_2 deren Wurzeln, so ist $x_1 = \sqrt[n]{y_1}$ und $x_2 = \sqrt[n]{y_2}$. Dabei bedeute $\sqrt[n]{y}$ zunächst nur die absolute Wurzel, die aber noch andere Wurzelwerte neben sich haben kann. Die Anzahl der Lösungen der ursprünglichen Gleichung wird also jedenfalls doppelt so groß als die Zahl der Wurzeln $\sqrt[n]{y}$.

Auf ähnlichem Wege ergeben sich die Wurzeln einer Gleichung von der Form $\sqrt[n]{x^2} + a\sqrt[n]{x} + b = 0$, indem wir $\sqrt[n]{x} = y$ setzen und desgleichen die Lösung der Gleichung: $(\log x)^2 + a \cdot (\log x) + b = 0$, wenn wir für $\log x$ die neue Unbekannte y einführen.

Durch wiederholte Auflösung quadratischer Gleichungen gelangen wir zum Ziele, wenn die auf Null reduzierte Gleichung die Form hat: $(x^2 + a x + b)^2 + c \cdot (x^2 + a x + b) + d = 0$. Setzen wir hier $x^2 + a x + b = y$, so ergeben sich aus der Gleichung $y^2 + c y + d = 0$ zwei Lösungen und aus jeder eine neue Gleichung $x^2 + a x + b = y_1$ und $x^2 + a x + b = y_2$, die abermals je zwei Lösungen zulassen. Da die Gleichung

$$(x^2 + a x + b)^2 + c(x^2 + a x + b) + d$$
$$= x^4 + 2 a x^3 + (a^2 + 2 b + c) x^2 + (2 a b + a c) x + (b^2 + b c + d) = 0$$

eine Gleichung vierten Grades ist, so erhalten wir für dieselbe vier Lösungen.

Wir können endlich jede algebraische Gleichung auflösen, wenn sich ihr auf Null reduzierter Ausdruck in ein Produkt von Faktoren zerlegen läßt, deren keiner den zweiten Grad übersteigt. Jeder dieser Faktoren gibt, gleich Null gesetzt, eine neue Lösung, und wir erhalten dann wieder ebenso viele Lösungen, als der Grad der Gleichung angibt.

Enthalten alle Glieder der Gleichung die Unbekannte x als Faktor, so ist $x = 0$ eine Wurzel der Gleichung. Man darf daher nie eine Gleichung durch die Unbekannte x dividieren, ohne zugleich $x = 0$ als Wurzel der Gleichung aufzuschreiben.

Bilden wir andererseits ein Produkt mit n Faktoren von der Form $x = a$ und setzen wir die daraus sich ergebende Funktion n-ten Grades gleich Null, so erhalten wir eine Gleichung n-ten Grades mit ebenso vielen Wurzeln, als der Grad der Gleichung Einheiten besitzt, denn der Wert des Produktes ist gleich Null, so oft einer der Faktoren gleich Null ist. Die Gleichung

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$$

hat mithin die Wurzeln a, b, c und d.

Wird eine ganze Funktion $f(x)$ n-ten Grades durch einen Faktor von der Form $x - m$ dividiert, so erhalten wir als Quotient eine ganze Funktion von x, und der Divisionsrest R hat denselben Wert wie $f(m)$, den die Funktion $f(x)$ für $x = m$ annimmt.

Gibt die Funktion vierten Grades $f(x)$ durch $x - m$ dividiert den Rest R und ist daher $f(x):(x-m) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c + \frac{R}{x-m}$, so folgt hieraus $f(x) = (x - m)(x^3 + a\,x^2 + b\,x + c) + R$, und deshalb ist wegen $x - m = 0$ für $x = m$ die Funktion $f(m) = 0 + R$. Wenn demnach $f(m) = 0$, so ist $f(x):(x-m) = f_1(x)$ eine ganze Funktion, d. h. wenn m eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, dann ist $f(x)$ durch den Wurzelfaktor $x - m$ teilbar und läßt sich als Produkt von der Form $f(x) = (x - m)\cdot f_1(x)$ darstellen.

Daß im allgemeinen eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln habe, spricht zuerst der Mathematiker Girard im Jahre 1629 aus. Newton beschränkte sich auf die Behauptung, daß eine Gleichung nicht mehr Wurzeln haben könne, als der Grad der Gleichung anzeigt. D'Alembert erbrachte einen ersten, Leonhard Euler im Jahre 1749 einen zweiten und Lagrange in Turin im Jahre 1772 einen dritten Beweis für den allgemein gültigen Satz, daß jeder Gleichung n-ten Grades n Wurzeln zuerkannt werden müssen. Im Jahre 1799 stellte endlich Gauss einen der neueren strengeren Auffassung angemessenen Beweis dieses Fundamentalsatzes der Algebra her.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir den Wert eines Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ berechnen, wenn derselbe für $x = m$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Wenn nämlich $f(m) = 0$ und $g(m) = 0$, so ist $f(x) = (x - m)\cdot f_1(x)$ und $g(x) = (x - m)\cdot g_1(x)$, somit $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-m)f_1(x)}{(x-m)g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$. Wenn dann $\frac{f_1(m)}{g_1(m)}$ nicht mehr die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so ist damit der Wert dieses Quotienten bestimmt, andernfalls kann man dieses

Verfahren so lange fortsetzen, bis diese unbestimmte Form nicht mehr auftritt oder Zähler und Nenner in ein Produkt von Faktoren ersten Grades zerfallen.

Zu einer anderen Anwendung des obigen Satzes geben die reziproken Gleichungen Anlaß, wenn deren Grad n eine ungerade Zahl ist.

Eine Gleichung heißt nach Euler **reziprok**, wenn die Koeffizienten jener Glieder gleich oder entgegengesetzt sind, für welche die Summe der Exponenten von x gleich dem Grade der Gleichung ist. Wenn nämlich m eine Wurzel ist, so genügt einer solchen Gleichung auch der reziproke Wert von m, nämlich $\frac{1}{m}$. Dividieren wir die Gleichung $x^5 + a x^4 + b x^3 \pm b x^2 \pm a x \pm 1 = 0$ durch x^5, so erhalten wir die Gleichung $1 + a \frac{1}{x} + b \frac{1}{x^2} \pm b \frac{1}{x^3} \pm a \frac{1}{x^4} \pm \frac{1}{x^5} = 0$, und wenn wir dann $\frac{1}{x} = y$ setzen, so geht diese Gleichung in die frühere über. Wenn also $x_1^5 + a x_1^4 + b x_1^3 + b x_1^2 + a x_1 + 1 = 0$ und daher x eine Wurzel der Gleichung ist, so ist auch für $y_1 = \frac{1}{x_1}$ der Ausdruck $1 + a y_1 + b y_1^2 + b y_1^3 + a y_1^4 + y_1^5 = 0$.

Aus $x^5 + a x^4 + b x^3 \pm b x^2 \pm a x \pm 1 = (x^5 \pm 1) + a (x^3 \pm 1) x + b (x \pm 1) x^2$ folgt, daß dieser Ausdruck durch $x \pm 1$ teilbar ist, weil stets $x^n \pm 1$ durch $x \pm 1$ teilbar ist, wenn n eine Ungerade bedeutet. Daher hat die Gleichung $x^5 + a x^4 + b x^3 + b x^2 + a x + 1 = 0$ die Wurzel $x = -1$ und $x^5 + a x^4 + b x^3 - b x^2 - a x - 1 = 0$ die Wurzel $x = +1$.

Wir können daher jede reziproke Gleichung dritten Grades auflösen, weil sich der linke Teil der auf Null reduzierten Gleichung in einen Faktor ersten und einen Faktor zweiten Grades zerlegen läßt, und jeder für sich gleich Null gesetzt eine lösbare Gleichung liefert.

Reziproke Gleichungen vierten Grades lassen sich auflösen, indem man die durch x^2 dividierte Funktion vierten Grades als eine quadratische Funktion des Ausdruckes $y = x + \frac{1}{x}$ darstellen kann, der selbst gleich Null gesetzt eine quadratische Gleichung ergibt. Die Division durch x^2 verursacht keine Veränderung der Wurzelwerte, weil x kein gemeinsamer Faktor aller Glieder der ursprünglichen Gleichung war, und diese wird ihrerseits auch befriedigt, wenn der durch x^2 dividierte Ausdruck gleich Null ist. Da $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ und daher $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, so folgt, daß

$x^4 + a x^3 + b x^2 + a x + 1 = x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b\right]$, wenn $y^2 - 2 + a y + b = 0$, oder $y^2 + a y + b - 2 = 0$ und

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2 - b}.$$

Aus jedem dieser beiden Werte von y ergeben sich wieder zwei Werte für x aus der Gleichung $x + \frac{1}{x} = y_1$ oder $x^2 - y_1 x + 1 = 0$ und ebenso zwei aus $x + \frac{1}{x} = y_2$ oder $x^2 - y_2 x + 1 = 0$.

Auch mit einzelnen Gleichungen dritten Grades haben sich schon die antiken Mathematiker griechischer Zunge befaßt. Damit hängt die berühmte „delische Aufgabe" zusammen, die Kante eines Würfels zu konstruieren, der den doppelten Kubikinhalt eines Würfels mit gegebener Kante hat. Aber erst bei Diophant im 3. oder 4. Jahrhundert n. Chr. finden wir eine Gleichung dritten Grades in algebraischer Form gelöst und die Inder und Araber des 11. und 12. Jahrhunderts vermochten wohl einzelne Formen solcher Gleichungen zu lösen, ohne jedoch die Möglichkeit mehrerer Wurzeln zu betonen. Mit größtem Wetteifer und gutem Erfolge bemühten sich um die allgemeine Lösung des Problems die italienischen Mathematiker der Renaissancezeit. Dies gelang zuerst dem Mathematikprofessor an der Universität Bologna Scipione del Ferro, und dann befaßten sich damit vorzüglich Cardano und Tartaglia. Cardanos Schüler Luigi Ferrari bewältigte hierauf die Gleichungen vierten Grades, und von dieser Zeit an wird die Literatur immer reicher und die Erkenntnis der wissenschaftlichen Grundlagen immer tiefer. Naturgemäß war das Streben darauf gerichtet, alle Gleichungen nach einer allgemeinen Methode zu lösen oder wenigstens die Bedingungen kennen zu lernen, wie weit dies möglich ist. Einen der wichtigsten Punkte bildet in der Theorie der Gleichungen der Satz, daß **jede algebraische Gleichung so viele Wurzeln hat, als der Grad anzeigt,** was zwar schon Leibniz vermutete, aber erst Gauß in der Dissertation vom Jahre 1799 zum erstenmal wissenschaftlich begründete. Ein anderer wichtiger Punkt ist die Erörterung des Zusammenhanges zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten der Gleichung, wie er sich durch die Entwicklung des Produktes aller Wurzelfaktoren ergibt. Sind also x_1, x_2, x_3 und x_4 die vier Wurzeln der Gleichung $x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$, so ist $x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ und $-a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$,

$-c = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$ und $d = x_1 x_2 x_3 x_4$. Es gibt aber eine andere allgemeine Auflösungsmethode, die in praktischer Hinsicht von ungleich größerer Wichtigkeit ist als diese theoretischen Methoden, wenngleich sie von vornherein darauf verzichtet, vollkommen genaue Resultate zu liefern. Sie hat zugleich den großen Vorzug, daß sie sich auf alle Gleichungen, und zwar nicht nur auf die algebraischen aller Grade, sondern auch auf solche Gleichungen anwenden läßt, in welchen die Unbekannte nicht als Grundzahl einer Potenz, sondern auch durch irgendwelche andere sogenannte „transzendente" Funktionen mit den Konstanten der Gleichung verknüpft ist. In letzterem Falle bezeichnet man eine solche Gleichung als eine **„transzendente"**, wie dies z. B. bei der Gleichung $x^{\log x} = a$ oder $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \operatorname{tang}^3 x = c$ der Fall ist.

Schon Leonardo von Pisa löste auf diesem Wege eine Gleichung dritten Grades auf zehn Stellen genau. Cardano und Stevin machten von einer ähnlichen Methode ausgiebigen Gebrauch, und der erste deutsche Berechner der Logarithmen Joost Bürgi und der Franzose Vieta beherrschten sie mit der größten Gewandtheit. Durch Newton wurde sie aber erst allgemein bekannt und führt daher auch den Namen „Newtonsche Näherungsmethode".

Wenn es uns gelingt, zwei benachbarte Zahlen p und q zu finden, für welche z. B. die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ — es ist das oben erwähnte Beispiel aus dem „Liber abaci" des Leonardo von Pisa — entgegengesetzt bezeichnete Werte annimmt, so muß zwischen denselben ein Wert liegen, für den $f(x) = 0$ ist. Berechnen wir diesen Ausdruck nach der Formel $f(x) = [(x+2)x + 10]x - 20$ für $x = 2$, so finden wir $[(2+2)2+10]2 - 20 = f(2) = 16$, und für $x = 1$ ist $f(1) = [(1+2)\cdot 1 + 10]\cdot 1 - 20 = -7$; während also x von 1 bis 2 steigt, nimmt $f(x)$ um $f(2) - f(1) = 16 + 7 = 23$ zu. Wir wenden dann dasselbe Interpolationsverfahren an wie beim Berechnen der letzten Stelle des Numerus aus den Logarithmen und fragen uns, wie viele Zehntel der letzten Stelle müssen wir zu 1 addieren, damit $f\left(1 + \frac{x}{10}\right) = 0$, wenn sich $f(x)$ proportional zu x ändern würde? Wenn dies der Fall wäre, so müßte die Proportion bestehen $\left[f\left(1 + \frac{x}{10}\right) - f(1)\right] : \left[f(2) - f(1)\right] = 7 : 23 = x : 10$, und daher wäre $x = 70 : 23 = 3 \cdot \ldots$ Berechnen wir $f(1{\cdot}3) = [(1{\cdot}3 + 2)\, 1{\cdot}3 + 10]\, 1{\cdot}3 - 20 = -1{\cdot}423$ und $f(1{\cdot}4) = [(1{\cdot}4 + 2)\, 1{\cdot}4 + 10]\, 1{\cdot}4 - 20 = 0{\cdot}664$, so ist $f(1{\cdot}4) - f(1{\cdot}3) = 0{\cdot}664 + 1{\cdot}423 = 2{\cdot}087$. Für $f\left(1{\cdot}3 + \frac{x}{1000}\right) = 0$, ergibt sich bei pro-

portionaler Vergrößerung die Proportion $1{\cdot}423:2{\cdot}087 = (x:1000):(100:1000)$, und daraus folgt $x = 142{\cdot}3:2{\cdot}087 = 68$. Setzen wir diesen und den nächsthöheren Betrag ein, so ergibt sich $f(1{\cdot}368) = -0{\cdot}0171$ und $f(1{\cdot}369) = 0{\cdot}0040$ und $f(1{\cdot}369) - f(1{\cdot}368) = 0{\cdot}0211$. Aus der Proportion $0{\cdot}0171:0{\cdot}0211 = x:100$ erhalten wir $x = 0{\cdot}171:0{\cdot}0211 = 81$ und $f(1{\cdot}36881) = 0{\cdot}0000$, mithin $x = 1{\cdot}36881$. Damit haben wir allerdings erst eine Wurzel, und zwar in der Gestalt eines unvollständigen Dezimalbruches, jedoch mit einer Genauigkeit, die erfahrungsgemäß bei den Messungen fast nie erreicht wird, die also dem praktischen Bedürfnisse vollständig genügt. Weitere Wurzeln könnte man dann finden, wenn man das Gleichungspolynom durch den hiermit gefundenen Wurzelfaktor dividiert und aus dem Quotient wieder im Näherungswege eine neue Wurzel berechnet, wenn er nicht schon wie hier eine anderswie lösbare Gleichung zweiten Grades darstellt.

Bei der Behandlung der Wurzeln haben wir jene positive Zahl als die absolute n-te Wurzel von a bezeichnet, die zur n-ten Potenz erhoben den absoluten Wert von a annimmt. Die Lehre von den Gleichungen ergibt aber, daß die absolute Wurzel nicht die einzige ist, und aus dem Satz, daß eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln hat, folgt sogar, daß es im allgemeinen n Zahlen gibt, welche der Gleichung $x^n - a = 0$ genügen, und die daher alle zur n-ten Potenz erhoben a geben. Im Gegensatz zu diesen, bezeichnet man eben jene nur auf den absoluten Wert bezogene Wurzel als die „absolute Wurzel". Mit Hilfe der letzteren lassen sich aber auch die übrigen finden, wenn wir die zur Berechnung der Wurzel bestimmte Gleichung aufzulösen vermögen. Ist nämlich $x^n - a = a\cdot\left(\frac{x^n}{a} - 1\right) = 0$, so setzen wir $\frac{x^n}{a} = y$ und erhalten die Gleichung $y - 1 = 0$. So ergibt sich $x^n = a \cdot y$ und hieraus $x = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{y}$, wobei $\sqrt[n]{a}$ die absolute Wurzel aus a und $\sqrt[n]{y} = z$, eine jener Einheitswurzeln bedeutet, die der Gleichung $z^n - 1 = 0$ genügen.

Für $n = 3$ erhalten wir die drei dritten Einheitswurzeln aus der Gleichung $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$. Mithin ist wegen $y - 1 = 0$, $y_1 = 1$ und wegen $y^2 + y + 1 = 0$, $y_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ und $y_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

Die drei Wurzeln der binomischen Gleichung $x^3 = a$ sind daher $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_2 = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$ und $x_3 = \sqrt[3]{a}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$.

Für $n=4$ lassen sich die vierten Einheitswurzeln aus der Gleichung $y^4-1=(y^2-1)(y^2+1)=(y+1)(y-1)(y+i)(y-i)=0$ ableiten, und diese sind daher $y_1=+1$, $y_2=-1$, $y_3=+i$, $y_4=-i$. Die vier Wurzeln der binomischen Gleichung $x^4=a$ finden wir, indem wir die Einheitswurzeln mit der absoluten vierten Wurzel aus a multiplizieren: $x_1=+\sqrt[4]{a}$, $x_2=-\sqrt[4]{a}$, $x_3=+i\sqrt[4]{a}$ und $x_4=-i\sqrt[4]{a}$.

Reduzieren wir eine Gleichung n-ten Grades auf Null, so bedeutet das Auflösen dieser Gleichung das Aufsuchen jener Werte von x, für welche der auf der einen Seite der Gleichung stehende Ausdruck einen bestimmten Wert, und zwar den Wert Null annimmt und eine solche Funktion, die für ganz bestimmte Werte von x den Wert Null annimmt, läßt sich demnach immer wieder durch Multiplikation der Wurzelfaktoren zusammenstellen. Während wir also bei der Integration eines Ausdruckes eine Funktion aufsuchen, von welcher wir nur die Änderungsgeschwindigkeiten für gewisse Werte von x kennen, lassen sich mit Hilfe dieser Sätze Funktionen aufstellen, die für gewisse Werte von x einer vorgegebenen Zahl, z. B. der Zahl Null gleich sind.

Nichtlineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Um festzustellen, welchen Grades eine Gleichung mit mehreren Unbekannten ist, ersetzt man alle in ihr vorkommenden Unbekannten durch die erste und erhält dann eine Gleichung, deren Grad für den Grad der ursprünglichen Gleichung maßgebend ist. So zeigt sich z. B., daß die Gleichung mit drei Unbekannten $x^2+3xyz+2z=0$ in die Gleichung $x^2+3x^3+2x=0$ übergeht und daher vom dritten Grad ist, obwohl früher keine Unbekannte in der dritten Potenz vorkam.

Man bezeichnet eine Gleichung als **homogen**, wenn die Unbekannte in allen Gliedern in derselben Potenz auftritt, falls wir alle Unbekannten der ersten Unbekannten gleich setzen.

Um ein Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten aufzulösen, müssen wir so viele voneinander unabhängige Gleichungen kennen, als im Gleichungssystem, wenn auch nicht in jeder einzelnen Gleichung, Unbekannte vorkommen. Die allgemeinste Lösungsform besteht darin, daß wir eine Unbekannte aus einer der Gleichungen berechnen und den dafür erhaltenen Ausdruck in alle

übrigen Gleichungen einsetzen. Dabei nimmt sowohl die Zahl der Gleichungen, wie auch die der Unbekannten um eine ab. So gelangen wir schließlich zu einer Gleichung mit einer einzigen Unbekannten, deren Grad aber im allgemeinen höher als der Grad der einzelnen Gleichungen ist. Die Auflösung nichtlinearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten führt also gewöhnlich zu Gleichungen höheren Grades einer einzigen Unbekannten. Man kann aber oft diesen meist sehr umständlichen Weg durch einfachere Lösungen ersetzen, indem man die Lösungsmethoden für quadratische Gleichungen mit denen von linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten in passender Weise verknüpft. Die einfachsten und wichtigsten Fälle dieser Art hat schon Diophant erledigt, und diese gingen von ihm durch Vermittlung der Araber auf das Abendland über, wo sich zuerst der Deutsche Jordanus Nemorarius in Rom, dann die Italiener Paciuolo und Cardano, in Deutschland Rudolff und Stifel und in Paris Vieta damit beschäftigten.

Das einfachste und wichtigste Beispiel eines Gleichungssystems zweiten Grades mit zwei Unbekannten ist folgendes: $x+y=a$ und $x \cdot y=b$.

Nach der oben angedeuteten Substitutionsmethode erhalten wir aus der ersten Gleichung $y=a-x$, und wenn wir diese Lösung in die zweite einführen, so ergibt sich $x(a-x)=b$ und aus $x^2-a\,x+b=0$ folgt $x_1=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4\,b}$ und $x_2=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4\,b}$

und andererseits ist $y_1=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4\,b}$ und $y_2=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a_2-4\,b}$

Dieses Beispiel ist aber noch deshalb besonders beachtenswert, weil seine Gleichungen bezüglich der Unbekannten „symmetrisch“ sind.

Symmetrisch nennt man eine Gleichung dann, wenn sich ihre Form nicht ändert, falls man die Unbekannten miteinander vertauscht.

Dies trifft beim vorliegenden Beispiel zu, weil sowohl das Produkt, wie auch die Summe kommutativ sind und beide Summanden denselben Koeffizienten (1) haben. Daher müssen wir auch in der Lösung die Unbekannten vertauschen können, d. h. jede Lösung für x ist auch schon eine solche für y. Dabei ist aber zu beachten, daß nur zusammengehörige Werte beider Unbekannten miteinander vertauscht werden dürfen.

Eine andere vielfach verwertbare Lösungsform dieses Gleichungssystems ist die folgende. Da die Summe $x+y=a$ bekannt ist, so suchen wir noch die Differenz $x-y=c$ zu berechnen,

woraus sich dann durch Addition $x = \frac{a + c}{2}$ und $y = \frac{a - c}{2}$ ergibt. Aus dem Quadrat $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$ läßt sich nämlich auch das Quadrat der Differenz berechnen, denn es ist $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = a^2 - 4b$ und daher $c = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$. Dabei ist immer zu beachten, daß beim Übergang vom Quadrat eines Binoms auf das einfache Binom letzteres zweierlei Vorzeichen haben kann und jedem derselben eine andere Lösung entspricht.

Homogene Gleichungen mit zwei Unbekannten pflegt man in der Weise der Lösung näher zu bringen, daß man aus ihnen zunächst das Verhältnis der beiden Unbekannten $\left(\frac{x}{y}\right)$ berechnet und als neue Gleichung verwertet. Enthalten alle Glieder einer Gleichung eine Unbekannte als Faktor, so ist die Lösung Null nur dann zutreffend, wenn sie allen Gleichungen des Systems genügt.

Einen wesentlichen Vorteil bei der Lösung von Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten bietet die zyklische Form der gegebenen Gleichungen, weil dann aus der Lösung für eine Unbekannte die für die übrigen unmittelbar abgeleitet werden kann.

Es seien folgende drei Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten gegeben: $x \cdot y = a$, $y \cdot z = b$ und $z \cdot x = c$. Diese Gleichungen bilden ein zyklisches System, denn wenn wir einerseits die drei Buchstaben x, y und z und andererseits die drei Buchstaben a, b und c an drei im gleichen Sinne aufeinanderfolgende Stellen zweier Kreise setzen, so geht die erste Gleichung in die zweite über, wenn wir jeden Buchstaben durch den im Kreislaufe folgenden ersetzen. Schreiten wir in beiden Kreisen noch um einen Punkt weiter, so geht aus der zweiten Gleichung die dritte und ebenso aus der dritten wieder die erste hervor.

Wenn wir die beiden ersten Gleichungen miteinander multiplizieren und das Resultat durch die dritte dividieren, so erhalten wir $y^2 = \frac{ab}{c}$, und daher ist $y = \pm\sqrt{\frac{ab}{c}}$. Die entsprechenden Werte der beiden andern Unbekannten ergeben sich hieraus wieder durch zyklische Vertauschung, indem wir x durch y, y durch z und z durch x und andererseits a durch b, b durch c und c durch a ersetzen. So gehen aus der obigen Lösung die beiden folgenden hervor:

$$z = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}} \text{ und } x = \pm\sqrt{\frac{ca}{b}}.$$

Ein zyklisches System von Gleichungen ersten Grades ist: $u + v = a$, $v + w = b$, $w + u = c$. Wenn wir von der Summe der

beiden ersten Gleichungen die letzte subtrahieren, so erhalten wir $2v = a + b - c$ und durch zyklische Vertauschung aus $v = \frac{a+b-c}{2}$ die beiden andern Lösungen $w = \frac{b+c-a}{2}$ und $u = \frac{c+a-b}{2}$. Aus der Kombination dieser beiden Lösungsformen ergibt sich die Lösung des zyklischen Gleichungssystems:
$xy + yz = a$, $yz + zx = b$, $zx + xy = c$; setzen wir also zunächst $xy = u$, $yz = v$ und $zx = w$, so folgt hieraus $x = \pm\sqrt{\frac{wu}{v}}$ $= \pm\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{2(a+b-c)}}$ und aus dieser Lösung einfach durch zyklische Vertauschung $y = \pm\sqrt{\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{2(b+c-a)}}$ und $z = \pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(c+a-b)}}$.

Ganzzahlige Lösung unbestimmter Gleichungen.

Wir haben ein Gleichungssystem als unbestimmt bezeichnet, wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen enthält. Nachdem wir aus einem System von n Gleichungen mit m Unbekannten $n-1$ eliminiert haben, bleiben uns in der letzten Gleichung $m-(n-1)$ $= m - n + 1$, also mindestens zwei Unbekannte übrig, wenn m wenigstens um 1 größer war als n. Aus einer Gleichung mit zwei Unbekannten können wir x mit Hilfe der Koeffizienten darstellen, aber die aus der Gleichung $ax + by + c = 0$ berechnete Lösung $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$ enthält noch die zweite Unbekannte y. Jedem Werte der letzteren entspricht ein anderer Wert von x, und dessen Wert bleibt daher so lange unbestimmt, als y unbestimmt ist. x erscheint demnach hier als eine lineare Funktion von y, die je nach den Werten dieser unabhängig Veränderlichen y ganze, gebrochene oder auch irrationale Werte annehmen kann. Diophant von Alexandrien hat bereits solche Gleichungen untersucht, allerdings ohne irrationale Werte in Betracht zu ziehen, er hat aber auch auf ganzzahlige Lösungen kein besonderes Gewicht gelegt. Dagegen hat der französische Mathematiker Bachet de Meziriac (1587—1638), der eine neue Ausgabe der Werke Diophants be-

sorgte, im Anschluß an diese Arbeit Untersuchungen über ganzzahlige Lösungen solcher Gleichungen veröffentlicht, d. h. er suchte die Aufgabe zu lösen, welchen ganzzahligen Werten von y entsprechen wieder ganzzahlige Werte von x. Infolge der zufälligen Verknüpfung dieses Problems mit der Ausgabe Diophants werden jene Gleichungen, die zur Aufstellung zweier Reihen sich entsprechender **ganzer** Zahlen dienen, als „diophantische Gleichungen" bezeichnet. Es handelt sich aber dabei nur um die Eigenschaften gewisser ganzer Zahlen, also um eine sogenannte „zahlentheoretische Untersuchung". Zu derartigen Aufgaben waren auch indische Astronomen, wie Aryabhatta u. a., durch die Beobachtung von Planetenkonstellationen veranlaßt worden, und auch die Chinesen haben sich schon früher aus demselben Grunde mit solchen Untersuchungen befaßt. Diese durch Bachet neuerdings aufgegriffenen Probleme wurden später besonders durch Fermat (1665) in Toulouse, Euler (1734) in Petersburg und Lagrange (1768) in Turin wesentlich gefördert.

Um diese Untersuchungen für die Gleichung $ax+by+c=0$ durchzuführen, gehen wir von der Annahme aus, daß a, b und c ganze Zahlen seien, und daß a und b keinen gemeinsamen Teiler m besitzen, durch den c nicht teilbar ist. Wäre nämlich auch c durch denselben teilbar, so können wir alle Glieder der Gleichung durch m dividieren, und die so vereinfachte Gleichung hat dieselben Lösungen wie die frühere. Wenn aber $a=m\cdot a'$ und $b=m\cdot b'$ und daher $ax+by=m(a'x+b'y)=-c$ und c durch m nicht teilbar ist, so kann $a'x-b'y=-\frac{c}{m}$ keine ganze Zahl sein, und es müßte daher entweder x oder y eine gebrochene Zahl sein. In diesem Falle ist mithin die Auffindung zweier ganzer Zahlen x und y, die der Gleichung $ax+by+c=0$ genügen, ausgeschlossen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann soll y so gewählt werden, daß der Quotient $x=-\frac{by+c}{a}$ keinen Rest gibt. Diese Forderung trifft für jeden ganzzahligen Wert von y zu, wenn $a=1$ und somit $x=-by-c$. Daß es aber auch für $|a|>1$ solche Werte von y gibt, läßt sich folgendermaßen zeigen.

Wenn zwei ganze Zahlen A und B bei der Division durch denselben Divisor n den gleichen Rest r geben, so nennt man sie „kongruent modulo n". Ist demnach $\frac{A}{n}=q_1+\frac{r}{n}$, also $A=q_1n+r$ und $\frac{B}{n}=q_2+\frac{r}{n}$, also $B=q_2n+r$, so bezeichnet man dies mit $A\equiv B\pmod{n}$.

Sind zwei Zahlen A und B nach n kongruent, so ist ihre Differenz durch n teilbar, denn aus $A = q_1 n + r$ und $B = q_2 n + r$ folgt: $A - B = q_1 n - q_2 n = (q_1 - q) n$, und es ist $\frac{A - B}{n} = q_1 - q_2$ eine ganze Zahl.

Ist A eine beliebige ganze Zahl und r_n der Rest der Division $A : n$; r_1 der Rest bei der Division $(A + 1) : n$, r_2 für $(A + 2) : n$ usf. bis zum Rest r_{n-1} für die Division $(A + n - 1) : n$, so bilden diese Reste ein „volles Restsystem für den Modul n“, d. h. unter diesen Resten kommen alle Reste vor, die überhaupt möglich sind, und jeder nur einmal. Daß die bei der Division der Zahlen $A_1 A + 1$, $A + 2$, bis $A + n - 1$ durch n sich ergebenden Reste ein volles Restsystem bilden, läßt sich folgendermaßen beweisen. Alle diese n möglichen Reste, unter denen auch der Rest Null vorkommt, sind voneinander verschieden, denn die Gleichheit zweier Reste ist ausgeschlossen. Wäre nämlich $0 \leqq t < s \leqq n - 1$ und sind die bei der Division durch n verbleibenden Reste von $A + s$ und $A + t$ einander gleich, so heißt das $A + s \equiv A + t \pmod{n}$. Dann müßte dem obigen Satz zufolge die Differenz dieser beiden Zahlen durch n teilbar sein, also $(A + s) - (A + t) = s - t = q \cdot n$ sein, obwohl s und t kleiner als n sind und ihre Differenz auch nicht Null ist. Wenn wir ferner ein „volles Restsystem“ erhalten, falls wir zu A die Zahlen 0, 1, 2, 3 usw. bis $n - 1$ addieren und diese Summen durch n dividieren, so ist dies auch bei der Zahl $A \pm c$ der Fall, denn aus $(A \pm c + s) \equiv (A \pm c + t) \pmod{n}$ folgt wieder, daß $s - t = q \cdot n$; also liefert auch der Ausdruck $A \pm c$ ein volles Restsystem. Das gleiche gilt für das Produkt $b \cdot A$, wenn b zu n relativ prim ist. Würde dieses Produkt bei der Addition der n Zahlen 0, 1, 2, 3 usw. bis $n - 1$ kein volles Restsystem geben, so müßte die Kongruenz bestehen $b(A + s) \equiv b(A + t) \pmod{n}$ und daher die Differenz $bA + bs - bA - bt = b(s - t)$ durch n teilbar sein; b ist aber zu n relativ prim und $s - t$ weder gleich Null, noch durch n teilbar, mithin sind unter den n verschiedenen Zahlen bA, $b(A + 1)$, $b(A + 2)$ usw. bis $b(A + n - 1)$ keine zwei kongruent, und sie geben für n ein „volles Restsystem“. Nach den eben durchgeführten Beweisen ist endlich auch der Ausdruck $bA \pm c$ so beschaffen, daß er ein volles Restsystem liefert, wenn wir für A der Reihe nach n aufeinander folgende ganze Zahlen einsetzen, falls b zu n teilerfremd ist.

Diesen Satz wenden wir auf die Lösung der Gleichung $ax + by + c = 0$ an, also auf den Ausdruck $x = -\frac{by + c}{a}$, denn für a und b haben wir die Teilbarkeit durch ein gemeinsames Maß ausgeschlossen.

Setzen wir für y in $x = -\frac{by+c}{a}$, a unmittelbar aufeinander folgende natürliche Zahlen ein, so erhalten wir ein volles Restsystem nach dem Modul a, und unter diesen muß auch der Rest Null vorkommen, d. h. für einen dieser Werte muß x einen ganzzahligen Wert annehmen.

Irgend zwei der gegebenen Gleichung $ax + by + c = 0$ genügende ganzzahlige Werte von x und y bezeichnet man als eine **„partikuläre Lösung"**. Aus jeder partikulären Lösung läßt sich eine **„allgemeine Lösung"**, d. h. eine solche ableiten, die noch beliebig viele andere Werte zuläßt. x' und y' seien die Werte einer partikulären Lösung und daher $ax' + by' + c = 0$; dann ist auch $ax' + by' + c - abu + abu = a(x' - bu) + b(y' + au) + c = 0$. Der vorgegebenen Gleichung genügen also auch alle ganzen Zahlen, die wir erhalten, wenn wir in den Ausdrücken $x = x' - bu$ und $y = y' + au$ für u irgend eine ganze Zahl einsetzen. Die „allgemeine Lösung" lautet daher $x = x' - bu$ und $y = y' + au$, wobei x' und y' eine „partikuläre Lösung" und u eine beliebige Zahl bedeutet.

Die zur Lösung solcher Gleichungen verwendete Substitutionsmethode besteht darin, daß man zuerst durch Aufstellung eines vollen Restsystems eine partikuläre Lösung und mit Hilfe derselben die allgemeine Lösung aufsucht. Wir setzen in $x = -\frac{by+c}{a}$ für y nacheinander alle Werte von 0 bis $a - 1$ ein, bis sich einmal der Rest Null einstellt, was sicher einmal zutrifft. Um dieses Ziel früher zu erreichen, empfiehlt es sich zuerst jene Unbekannte zu berechnen, deren Koeffizient den absolut genommen kleineren Wert besitzt. Aus dem so gewonnenen Wertepaar x', y' ergibt sich die allgemeine Lösung nach den obigen Formeln $x = x' - bu$ und $y = y' + au$.

Nach der im wesentlichen schon von Bachet erfundenen, aber nach Euler benannten Methode verfährt man folgendermaßen, um sofort zu einer „allgemeinen Lösung" zu gelangen. Wir haben bereits gesehen, daß das Aufsuchen ganzzahliger Lösungswerte sofort zum Ziele führt, wenn eine von den Unbekannten den Koeffizienten 1 besitzt. Ist demnach $a = 1$, so erhalten wir für $x = -\frac{by+c}{1} = -by - c$ immer ganze Zahlen, so oft wir für y irgend eine ganze Zahl einsetzen. Die wiederholte Anwendung des folgenden Verfahrens führt zu einer solchen Gleichung. Ist nämlich $\frac{b}{a}$

$= q_1 + \frac{r_1}{a}$ und $\frac{c}{a} = q_2 + \frac{r_2}{a}$, so ist $x = -\frac{by+c}{a} = -q_1 y - q_2 - \frac{r_1 y + r_2}{a} = -q_1 y - q_2 - u_1$ und daher eine ganze Zahl, falls auch u eine ganze Zahl ist. Die neue unbestimmte Gleichung $a u_1 = r_1 y + r_2$, welche aus $u_1 = \frac{r_1 y + r_2}{a}$ folgt, hat kleinere Koeffizienten (r_1 und r_2) als die frühere (b und c), und wenn wir aus derselben $y = \frac{a u_1 - r_2}{r_1}$ berechnen, indem wir wieder die ganzzahligen Quotienten q ausscheiden und das Restglied zur Aufstellung einer neuen Gleichung benützen, so hat dieselbe noch kleinere Koeffizienten. So fortfahrend müssen wir entweder zu einem Ausdruck kommen, der überhaupt kein Restglied enthält oder bei dem der Koeffizient einer Unbekannten 1 ist. Aus der allgemeinen Lösung für die letzte Unbekannte ergeben sich diejenigen der gegebenen Gleichung. So finden wir aus $3x - 17y = 11$ die Lösung $x = \frac{17y+11}{3} = 5y + 3 + \frac{2y+2}{3} = 5y + 3 + u_1$, und die neue Gleichung heißt daher $3u_1 = 2y + 2$. Für y erhalten wir daraus $y = \frac{3u_1 - 2}{2} = u_1 - 1 + \frac{u_1}{2} = u_1 - 1 + u_2$; die dritte Gleichung heißt $u_1 = 2u_2$ und diese hat bereits die Form einer allgemeinen Lösung. Es ist also $y = 3u_2 - 1$ und $x = 5(3u_2 - 1) + 3 + 2u_2 = 17u_2 - 2$ eine **allgemeine Lösung**, und für irgend einen Wert von u_2, z. B. $u_2 = 1$, erhalten wir die **partikuläre Lösung** $x = 15$ und $y = 2$.

Es liegt in der Natur mancher Aufgaben, daß nur positive ganzzahlige Lösungen oder nur solche Lösungen gesucht werden, die zwischen gewissen Grenzen liegen. Dann ist die Zahl der zulässigen Lösungen nicht mehr eine unbegrenzte, oder, wie man auch zu sagen pflegt, eine „unendlich vieldeutige“. In diesem Falle muß die unabhängig Veränderliche der allgemeinen Lösung so gewählt werden, daß die daraus berechneten Werte der Unbekannten den gestellten Bedingungen genügen; wir erhalten dann für die unabhängig Veränderliche u eine oder mehrere Bedingungsgleichungen.

Sollen z. B. beim obigen Beispiel x und y nur positive Werte annehmen, so muß $y = 3u_2 - 1 > 0$ und $x = 17u_2 - 2 > 0$, mithin in jedem Falle $u_2 > 1$ sein; wenn beide Lösungen unter 100 liegen sollen, so muß wegen $y = 3u_2 - 1 < 100$, $u_2 < 34$ und wegen

$x = 17u_2 - 2 < 100$, $u_2 < \frac{102}{17}$, also $u_2 < 6$ gewählt werden. Es sind daher überhaupt nur die für $u_2 = 1, 2, 3, 4$ und 5 sich ergebenden Werte von x und y zulässig und ergeben für y die Lösungen 2, 5, 8, 11 und 14 und für x die Zahlen 15, 32, 49, 66 und 83. Die Zahl der Lösungen hängt in solchen Fällen mit dem Grad der Gleichung und der Zahl der Unbekannten algebraisch in keinem Zusammenhang.

Besteht das aufzulösende Gleichungssystem aus zwei Gleichungen, die drei Unbekannte enthalten, so müssen die ganzzahligen Lösungen zunächst jene Gleichung befriedigen, die sich durch die Elimination einer von den drei Unbekannten ergibt. Setzt man die dafür gefundenen allgemeinen Lösungen in eine der ursprünglichen Gleichungen ein, so erhalten wir eine neue unbestimmte Gleichung zwischen der eliminierten Unbekannten und der unabhängig Veränderlichen u der allgemeinen Lösung. Auch diese muß nach einem der angeführten Verfahren gelöst werden.

Eine Gleichung mit drei Unbekannten kann, falls ihre Koeffizienten die entsprechenden Eigenschaften besitzen, in der Weise in ganzen Zahlen aufgelöst werden, daß man einer von den Unbekannten einen beliebigen ganzzahligen Wert gibt und die daraus sich ergebende Gleichung nach den bekannten Methoden auflöst. Ebenso kann man für jeden andern Wert jener willkürlich gewählten Unbekannten andere allgemeine Lösungen der beiden übrigen Unbekannten finden.

Unter den unbestimmten Gleichungen zweiten Grades sind zwei von besonderer Wichtigkeit wegen ihrer formellen Beziehung zum pythagoräischen Lehrsatz uud seiner räumlichen Erweiterung auf das rechtwinkelige Parallelepiped. Im ersten Falle handelt es sich um die unbestimmte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, im letzteren um die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = u^2$, die für ganze Zahlen erfüllt sein sollen. Man kann diese beiden Aufgaben auch so aussprechen: es sollen jene ganzen Zahlen aufgesucht werden, deren Quadrate sich in die Summe der Quadrate zweier oder dreier anderer ganzer Zahlen zerlegen lassen. Für irgend zwei Zahlen a und b besteht die Formel $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$, deren Richtigkeit sich unmittelbar durch die Ausführung der beiderseits angegebenen Operationen ergibt. Ist in derselben $a = m$ und $b = 1$, so erhalten wir $(m^2 + 1)^2 = (m^2 - 1)^2 + (2m)^2$. Setzen wir daher $m^2 + 1 = z$, $m^2 - 1 = x$ und $2m = y$, so erhalten wir für alle ganzzahligen Werte von m drei ebenfalls ganze Zahlen x, y und z, die der Gleichung $z^2 = x^2 + y^2$ genügen.

Ebenso kann man sich von der Richtigkeit der identischen

Gleichung $(a^2 + ab + b^2)^2 = a^2(a + b)^2 + a^2b^2 + (a + b)^2b^2$ überzeugen. Wenn in derselben $a = m$ und $b = 1$ ist, so erhalten wir die für alle ganzen Werte von m gültige Formel $(m^2 + m + 1)^2 = m^2(m + 1)^2 + m^2 + (m + 1)^2$. Setzen wir in dieser $m^2 + m + 1 = u$, $m(m + 1) = x$, $m = y$ und $m + 1 = z$, so ergeben sich wieder für jeden ganzzahligen Wert von m vier ganze Zahlen u, x, y und z, die der Gleichung $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ genügen.

Die Reihen.

Überall, wo wir einer geordneten Gruppe von Zahlen begegnen, können wir uns die Frage vorlegen, welches mathematische Gesetz dieselben untereinander verknüpft. Reihengliederungen kommen auch außerhalb der Mathematik oft vor, und eine der bekanntesten und gebräuchlichsten Reihe ist gewiß das Alphabet. Wie hier die Buchstaben, so können wir auch Zahlen im allgemeinen beliebig anordnen, aber zu einer „Reihe" im mathematischen Sinne wird eine Menge von Zahlen erst dadurch, daß dieselben in einer bestimmten Ordnung aneinandergegliedert und durch mathematische Operationen untereinander verknüpft werden. Eine Zahl aus der Menge wird als „erstes Glied der Reihe" und immer nur eines als „folgendes" aufgefaßt. Wir „kennen" die Reihe, wenn uns irgend ein „Glied" derselben und das Gesetz mitgeteilt wird, nach dem die aufeinander folgenden Glieder gebildet werden. Daran knüpfen sich zwei naheliegende Aufgaben, nämlich ein beliebiges Glied der bekannten Reihe zu berechnen und die Summe mehrerer Glieder zu finden, ohne die Glieder einzeln zu addieren. Die Naturbeobachtung und das praktische Leben geben bei unzähligen Anlässen Gelegenheit zur Auffindung und Aufstellung solcher Reihen, und es darf uns daher nicht wundern, wenn wir schon bei den frühesten Denkmälern der Entwicklung der Mathematik den Begriff der „Reihe" in diesem Sinne vorfinden. Dies trifft bereits bei dem aus der Zeit von 2000 bis 1700 v. Chr. stammenden „Papyrus Rhind", dem Rechenbuch des Ahmes, zu. Die Babylonier betrachteten das Wachstum des Mondes von diesem Standpunkt. Theon von Smyrna (130 v. Chr.) berichtet, daß die (dem 6. und 5. Jahrhundert v. Chr. angehörige) pythagoräische Philosophenschule nicht nur die Reihe der natürlichen, sondern auch die der geraden und ungeraden Zahlen zu summieren wußte. Archimedes summierte auch die aus den Quadratzahlen gebildete Reihe und verstand es sogar, den Wert einer aus unendlich vielen Gliedern zusammengesetzten Summe mathematisch zu be-

handeln. Auch die Inder und Araber beherrschten ungefähr in gleichem Maßstabe diese Kenntnisse und vermittelten sie dem Abendland, wo sie zuerst Leonardo von Pisa durch sein Werk „Liber abaci" weiter verbreitete. Von Italien aus gelangten sie zur Renaissancezeit nach Deutschland, England und Frankreich, und seit dem 19. Jahrhundert bildet die Lehre von den unendlichen Reihen einen der wichtigsten Teile der höheren Mathematik.

Arithmetische Progressionen heißen jene Reihen, bei welchen die Differenz d zweier unmittelbar aufeinander folgender Glieder gleich ist.

Ist a_1 jenes Glied der Reihe, von dem wir bei der Ableitung der folgenden Glieder ausgehen, also das „Anfangsglied", und a_2 das nächste Glied, so muß jedes folgende um $a_2 - a_1 = d$ größer, bzw. kleiner sein, je nachdem $d > 0$ oder $d < 0$ ist. So erhalten wir der Reihe nach aus $a_3 - a_2 = d$, $a_3 = a_2 + d$, aus $a_4 - a_3 = d$, $a_4 = a_3 + d$ usw.

Während wir so die einzelnen Glieder durch Addition der Differenz d aus dem unmittelbar vorhergehenden Glied berechnen können, verlangt die Aufgabe nach der Bestimmung des „allgemeinen Gliedes", daß wir das n-te Glied ohne Berechnung der Zwischenglieder aus dem ersten und der „Differenz der Reihe" berechnen. Suchen wir den Wert des dritten Gliedes mit Hilfe des ersten und der Differenz darzustellen, so finden wir $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$. Dieser nur für das dritte Glied gültigen Formel können wir die allgemeine Formel entnehmen, indem wir den Index 3 des zu berechnenden Gliedes durch n und zugleich den Koeffizienten 2 durch $n - 1$ ersetzen. Die daraus sich ergebende Formel $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)\,d}$ ist die allgemeine, wenn sie durch den Schluß von n auf $n + 1$ als allgemein gültig bestätigt werden kann. Für $n = 2$ trifft sie zu, weil $a_2 = a_1 + (2 - 1)d = a_1 + d$, und wegen $a_{n+1} - a_n = d$ ist $a_{n+1} = a_n + d = [a_1 + (n - 1)d] + d = a_1 + [(n + 1) - 1]\,d$. Da sie also für das zweite Glied gültig ist und auch für das folgende gültig bleibt, wenn sie für das vorausgehende zutrifft, so ist sie allgemein richtig.

Die zweite Aufgabe ist die Berechnung der Summe von n aufeinanderfolgenden Gliedern, deren erstes a_1 ist. Berechnen wir zunächst die Summe einer dreigliedrigen Reihe, so können wir dieselben entweder in folgender Form ausdrücken: $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d)$ oder in der Form $s_3 = a_3 + a_2 + a_1 = a_3 + (a_3 - d) + (a_3 - 2d)$; durch die Addition dieser beiden Summen erhalten wir $2s_3 = (a_1 + a_3) + (a_1 + d + a_3 - d) + (a_1 + 2d + a_3 - 2d) = (a_1 + a_3) + (a_1 + a_3) + (a_1 + a_3) = 3\,(a_1 + a_3) = 3\,(a_1 + a_1 + 2\,d)$

$= 3(2a_1 + 2d)$, und daher ist $s_3 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) = 3a_1 + \frac{3 \cdot 2}{2}d$. Daraus können wir die allgemeine Summenformel entnehmen und zeigen, daß dieselbe nicht nur für $n = 3$, sondern auch für $n + 1$ richtig ist, wenn sie für n gilt, und daher „allgemein" ist. Ist nämlich $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, so ist $s_{n+1} = \frac{n+1}{2}(a_1 + a_{n+1})$, denn

$$s_{n+1} = \frac{n+1}{2}(a_1 + a_n + d) = \frac{n+1}{2}(a_1 + a_n) + \frac{n+1}{2}d = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$+ \frac{a_1 + a_n}{2} + \frac{n+1}{2}d = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) + \frac{2a_1 + (n-1)d + (n+1)d}{2}$$
$$= s_n + (a_1 + nd) = s_n + a_{n+1}.$$

Aus dieser Formel können wir eine andere ableiten, die nur das Anfangsglied a_1, die Reihendifferenz d und die Zahl der Summanden n enthält, und finden so $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$ $= \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = na + \frac{n(n-1)}{2}d.$

Versuchen wir noch die Summe aus unendlich vielen Gliedern zu berechnen, d. h. den Wert zu bestimmen, den diese Summe annimmt, wenn die Zahl der Glieder größer wird als eine beliebig hohe Zahl. In diesem Falle übersteigt auch der Wert der Summe seinem absoluten Betrage nach jede noch so große Zahl N. Nehmen wir an, es sei $a > 0$ und $d > 0$, so läßt sich zeigen, daß $s_n > N$, wenn $n > g$ gewählt wird. Dies ist der Fall, wenn wir für n einen solchen Wert verwenden, daß $a_n > N$ ist, wenn also $a_n = a_1 + (n-1)d > N$, und um so mehr, wenn schon $(n-1)d > N$, $nd > N + d$ und daher $n > \frac{N+d}{d} = g$ ist. Soll $s_n > 1000$ sein, so wählen wir für $d = 2$, $n > \frac{1000 + 2}{2} = 501 = g$. Dieses Verhalten der Summe bei unbegrenzter Zunahme der Zahl der Summanden bezeichnet man mit dem Ausdrucke:

Der Grenzwert der Summe s_n für $n = \infty$ ist unendlich oder die arithmetische Reihe ist divergent.

Wenn d negativ ist, so heißt die Reihe eine „fallende". Dann ist auch der Grenzwert des allgemeinen Gliedes a_n negativ und seinem absoluten Werte nach größer als eine beliebig große Zahl. Wenn auch in der Formel für die Summe $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ das a_1 das entgegengesetzte Vorzeichen von a_n hat, so nimmt diese Summe doch schließ-

lich das Vorzeichen des unbegrenzt wachsenden a_n an und erhebt sich seinem absoluten Betrage nach über jeden noch so hohen Wert. Das gilt auch, wenn $a < 0$ aber $d > 0$ ist.

Eine der wichtigsten Anwendungen der arithmetischen Reihen ist das **Interpolieren** und **Extrapolieren.** Sind a und b zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so können wir zwischen dieselben r neue Glieder so einschalten, daß sie mit a und b eine arithmetische Reihe von $r + 2$ Gliedern bilden. Da in diesem Falle $b = a + (r + 2 - 1) d' = a + (r + 1) d'$, so hat die interpolierte Reihe die Differenz $d' = \frac{b - a}{r + 1}$. Wenn wir diese neue Reihe über a und b hinaus fortsetzen, so erhalten wir „extrapolierte Reihen".

Wir haben die Interpolation bereits dazu verwendet, um die Logarithmen jener Numeruswerte zu finden, die zwischen zwei uns bekannten Logarithmen liegen. Wir können diese Rechnung nach der obigen Formel ausführen, nachdem wir uns überzeugt haben, daß dabei der Fehler kleiner bleibt als eine Einheit der niedersten Dezimalstelle. Wollten wir mit derselben Tafeldifferenz „extrapolieren", so würde der dadurch entstehende Fehler bald diese Grenze überschreiten. Das „Extrapolieren" ist also nur dann zulässig, wenn wir annehmen können, daß sich die Differenz der extrapolierten Reihe auch außerhalb des gegebenen Intervalles gar nicht oder nur so wenig ändert, daß die eventuellen Fehler unterhalb gewisser Grenzen liegen.

Geometrische Progressionen heißen jene Reihen, bei welchen der Quotient q zweier unmittelbar aufeinander folgender Glieder denselben Wert hat.

Ist wieder a_1 das Anfangsglied und a_2 das zweite, so muß auch für irgend zwei andere aufeinander folgende Glieder der Quotient $\frac{a_2}{a_1}$ oder das Verhältnis $a_2 : a_1 = q$ sein. Daraus erklärt sich die Berechnungsweise „arithmetische" und „geometrische" Progressionen, da ja die Differenz früher das „arithmetische" und der Quotient das „geometrische" Verhältnis genannt wurde. Sie läßt sich also nur vom Standpunkt der Entwicklung der mathematischen Literatur rechtfertigen.

Aus $\frac{a_2}{a_1} = q$, $\frac{a_3}{a_2} = q$, $\frac{a_4}{a_3} = q$ usw. folgt $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$ und $a_4 = a_1 \cdot q^3$ und hieraus die allgemeine Formel $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Für a_3 trifft dieselbe zu und ist auch für $n + 1$ gültig, falls sie für n

richtig ist. Wenn nämlich $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ und $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, so folgt $a_{n+1} = a_n \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q = a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}$.

Um die Summe von n Gliedern einer geometrischen Progression zu finden, gehen wir von der Summe von drei Gliedern aus und erhalten so $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2$. Die Summe der vier Reihenglieder $a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ können wir aber mit Hilfe von s_3 in zweierlei Form ausdrücken, denn es ist $a_1 \cdot q^3 + s_3 = a_1 q^3 + a_1 q^2 + a_1 q + a_1 = q(a_1 q^2 + a_1 q + a_1) + a_1 = q \cdot s_3 + a_1$, und aus der Gleichung $q \cdot s_3 + a_1 = a_1 \cdot q^3 + s_3$ folgt $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $n = 3$. Daß sie allgemein gültig ist, davon kann man sich überzeugen, wenn man die Division im zweiten Faktor ausführt. Ist sie aber für n gültig, so ist auch $s_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, denn $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1 q^n = a_1 \cdot \frac{(q^n - 1) + (q - 1) q^n}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, sie ist daher allgemein gültig.

Untersuchen wir den Grenzwert dieser Summe für den Fall, daß die Zahl der Glieder über alle Grenzen wächst, so gelangen wir zu folgendem Resultat. Da sich die Summe von n Gliedern durch die Formel $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ausdrücken läßt und sich daher bei zunehmender Zahl der Glieder nur der zweite Faktor ändert, während der erste konstant bleibt, so ist nur das Verhalten des Quotienten $\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ maßgebend, ob der Grenzwert der Summe endlich ist. Aber auch in diesem Ausdruck ist nur ein Glied von n abhängig, nämlich q^n und dessen Wert bleibt nur dann für beliebig große n unter einem endlichen Wert, wenn $q \leqq 1$. Der Grenzwert der Summe s_n, für unbegrenzt wachsende Werte von n ist $s = \frac{a_1}{1 - q}$, denn es läßt sich zeigen, daß der Unterschied $s - s_n$ kleiner ist als eine beliebig kleine Zahl ε, falls wir n größer als eine bestimmte Zahl wählen. Es ist nämlich $s - s_n = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1 - a_1 + a_1 q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} \cdot q^n < \varepsilon$, wenn $q^n < \frac{\varepsilon(1 - q)}{a_1}$. Wählen wir also eine solche Zahl n, daß $q^n = \frac{\varepsilon(1 - q)}{a_1}$ und daher $n \log q$

$= \log \frac{\varepsilon(1-q)}{a_1}$, also $n = \log \frac{\varepsilon(1-q)}{a_1} : \log q$, so ist für jedes größere n die Differenz $\left|\frac{a_1}{1-q} - s_n\right| < \varepsilon$ und mithin $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$. Wenn dagegen $q = 1$ ist, so läßt sich die Formel $\frac{q^n - 1}{q-1}$ nicht verwenden, weil ihr Nenner 0 und daher der Quotient bedeutungslos ist. In diesem Falle ist die endlose Summe $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + \ldots$ also dem Grenzwert der divergenten Summe einer arithmetischen Reihe gleich, deren Differenz $a_1 = d$ ist, und wächst wie diese über alle Grenzen. Für $q = 1$ ist also der Grenzwert der unendlichen Summe größer als jede beliebig hohe Zahl und somit die Reihe **divergent**, während sie für Werte von $q < 1$ einen den endlichen Grenzwert $s = \frac{a_1}{1-q}$ hat und deshalb als **konvergent** bezeichnet wird. Ist endlich $q > 1$, so ist die Summe ebenfalls **divergent**, weil alle Glieder der Reihe noch größere Werte annehmen als für $q = 1$.

Auch mit Hilfe der geometrischen Reihe können wir zwischen irgend zwei Glieder a und b eine geometrische Reihe von r Gliedern einschalten, und dann ist b das $(r+2)$-te Glied derselben, mithin $b = a \cdot q'^{r+1}$ und $q' = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$. Diese Interpolationsform kommt aber in den Anwendungen seltener vor als die der arithmetischen Reihen, die sich auch rechnerisch viel einfacher durchführen läßt und innerhalb entsprechend enger Grenzen dieselben Dienste leistet.

Zinseszins- und Rentenrechnung.

Bei der Besprechung der Prozentrechnung haben wir die Formel kennen gelernt, nach der die auf ein Jahr entfallenden Zinsen berechnet werden. Die in derselben vorkommende Verzinsungszeit hat fast ausnahmslos nur auf jene Fälle Bezug, wo es sich darum handelt, die auf einen Bruchteil des Jahres entfallenden Zinsen zu bestimmen. Sie heißt $z = \frac{p \cdot k \cdot j}{100} = \frac{p \cdot k \cdot t}{36000}$, wenn sich j auf das Jahr als Einheit und t auf den Tag als Einheit bezieht. Diese Formel wird auch verwendet, wenn in den folgenden Kapitalsberechnungen Bruchteile des Jahres in Betracht kommen. Wenn dagegen mehrjährige Verzinsungen in Frage kommen, so verwendet

man an Stelle dieser Formel den zuerst im Rechenbuch des Widmann von Eger (1489) verwendeten **Aufzinsungsfaktor** $q = 1 + \frac{p}{100}$, falls am Ende jedes Jahres die Zinsen zum Kapitale geschlagen und zugleich mit diesem verzinst werden sollen. Nach den bestehenden gesetzlichen Bestimmungen ist dies aber nur unter bestimmten Bedingungen zulässig, weil nicht jeder Unternehmer in der Lage ist, mit seinen Arbeitskräften beliebig große Kapitalien nutzbringend zu verwerten. Andererseits beruhen aber manche Geldinstitute, wie z. B. die Sparkassen und Bankgeschäfte auf dem Grundsatze, bare Geldbeträge solchen Unternehmungen zuzuführen, die wie die Bahnen, Bergwerke und Fabriken, größerer Anlagekapitalien bedürfen und sie auch zu verzinsen in der Lage sind. Bei einer solchen auch auf die abgelaufenen Zinsen sich beziehenden Verzinsung spricht man von einem „auf Zinseszinsen" angelegten Kapital. Mit Benutzung des Aufzinsungsfaktors berechnen wir den Wert des Kapitals nach n Jahren als das $(n+1)$-te Glied einer geometrischen Progression, bezeichnen aber dessen Betrag, um auf die n-malige Verzinsung hinzuweisen, mit K_n und finden so die Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$, wobei wir mit K_0 das **zu Beginn** der Verzinsungszeit erlegte Kapital, mit K_n den Wert desselben samt den verzinsten Zinsen **am Ende** des n-ten Jahres und mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ den auf p Prozente berechneten Aufzinsungsfaktor für ganzjährige Verzinsung bezeichnen.

Es kommt auch vor, daß die nach jedem Halbjahr fälligen Zinsen sofort zum Kapital geschlagen werden; in diesem Falle betragen die Zinsen nach einem halben Jahr $z = \frac{p \cdot K}{2 \cdot 100}$, und das um diesen Betrag vermehrte Kapital ist dann $K + z = K + \frac{p \cdot K}{2 \cdot 100}$ $= K\left(1 + \frac{p:2}{100}\right) = Kq'$. Der Aufzinsungsfaktor q' beträgt demnach bei halbjähriger Verzinsung zu p Prozent $q' = + \frac{p:2}{100}$. Da sich gleichzeitig die Zahl der Kapitalisierungen verdoppelt, so steigt das Kapital nach n Jahren zum Werte $K_n = K_0 \cdot q'^{2n}$ an.

Bei vierteljähriger Kapitalisierung ist das um die Zinsen eines Vierteljahres vermehrte Kapital gleich $K + z = K + \frac{p \cdot K}{4 \cdot 100}$ $= K \cdot \left(1 + \frac{p:4}{100}\right) = K \cdot q''$, und da zugleich die Zahl der Kapitali-

sierungen auf das Vierfache steigt, so beläuft sich nach n Jahren das Kapital auf $K_n = K_0 \cdot q''^{4n}$.

Ist die Auszahlung einer bestimmten Geldsumme erst nach mehreren Jahren fällig, so bezeichnet man jenen Wert, der nach dem vereinbarten Zinsfuß und ganz-, halb- oder vierteljähriger Kapitalisierung in der angegebenen Zeit die genannte Summe liefert, als deren **Barwert**.

Kommen für die Berechnung des Endwertes eines auf Zinseszinsen angelegten Kapitales nur Bruchstücke des Endjahres in Betracht und wir berechnen ihn nach der Formel $K_n = K \cdot q^{n + \frac{r}{12}}$, wobei r die Zahl der Monate im letzten Jahre bedeutet, so sagt man, dieser Betrag wurde nach dem „konformen Zinsfuß" bemessen. Wenn aber die Zinsen für das unvollständige Jahr nach der einfachen Zinsrechnung bestimmt wurden, so spricht man vom „relativen Zinsfuß".

Nach dieser Formel kann man auch die zeitliche Zu-, bzw. Abnahme irgendwelcher veränderlicher Größen beurteilen, indem man dieselben nach Prozenten der in einem bestimmten Zeitpunkt gemessenen Maßzahl ausdrückt und auf die Dauer der beobachteten Veränderung bezieht. So kann man z. B. berechnen, um wie viele Prozente durchschnittlich die Einwohnerzahl einer Stadt oder eines Landes jährlich zunimmt, wenn sie sich in 10 Jahren um einen bekannten Betrag erhöht hat. Dadurch lassen sich die zur Vergleichung mit andern Beobachtungen nötigen Maßzahlen gewinnen, und zwar sowohl hinsichtlich der Vergleichung mit gleichzeitigen Veränderungen anderer Größen, als auch mit Veränderungen derselben Größe in einem früheren oder späteren Zeitpunkt.

Unter einer **Rente** oder **Annuität** versteht man eine jährlich fällige Geldzahlung, die sowohl zeitlich, als auch ihrer Größe und dem Zinsfuße nach vertragsmäßig genau bestimmt ist. Beschränken wir uns auf den häufigsten Fall, daß diese Beträge immer gleich hoch sind und zum Zinsfuß $q = 1 + \frac{p}{100}$ mit ganzjähriger Kapitalisierung verzinst werden, so ergibt eine am Ende jedes Jahres fällige Rente von a Werteinheiten den Endwert $R = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, denn das am Ende des ersten Jahres erlegte Kapital a wird nur $n - 1$ Jahre lang verzinst und der zuletzt erlegte Betrag gelangt, da er sofort wieder behoben wird, gar nicht zur Verzinsung. Die Summe aller verzinsten Einlagen ist daher die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied a, deren Quotient q und deren letztes

Glied aq^{n-1} ist. Wenn die Beträge zu Beginn jedes Jahres erlegt werden, so liegen sie sämtlich ein Jahr länger auf Zinsen an und ergeben jede für sich und mithin auch in ihrer Summe ein q-fach größeres Resultat. In diesem Falle ist also der Endwert der Rente $R = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$.

Wird eine solche Rente durch eine einmalige Einzahlung, also durch eine sogenannte **Mise** erworben, so muß dieser auf Zinseszinsen angelegte Betrag am Ende der Zeit dem Endwert der Rente oder am Anfange ihrem Barwert gleich sein. Desgleichen muß, wenn eine zu p Prozent verzinsliche Schuld oder ein „Anlehen" unter solchen Bedingungen in n gleichen Jahresraten zurückgezahlt oder „amortisiert" werden soll, dasselbe entweder am Anfang dem Barwert der Rente oder nach erfolgter Verzinsung durch n Jahre dem Endwert der Rente gleich sein.

Der Barwert B der Rente $R = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = B \cdot q^n$ ist daher $B = a \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q - 1)}$, falls die Zahlungen am Ende jedes Jahres erfolgen, und es ist $B = a \cdot \frac{(q^n - 1) q}{q^n (q - 1)} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1} (q - 1)}$, wenn sie zu Anfang des Jahres stattfinden.

Bei halbjähriger Kapitalisierung setzt sich die Summe einer, am Ende des Jahres fälligen Rente aus den Gliedern einer geometrischen Reihe zusammen, deren erstes Glied a ist, während jedes folgende sich durch Multiplikation mit $q'^2 = \left(1 + \frac{p:2}{100}\right)^2$ ergibt, weshalb der Endwert nach n Jahren $R = a \cdot \frac{q'^{2n} - 1}{q'^2 - 1}$.

Diese Form der verschiedenen Rentenberechnung stammt im wesentlichen vom berühmten Astronomen E. Halley in Greenwich († 1742).

Kombinatorik.

Wenn wir n als die Zahl der in einer Menge vorhandenen Einheiten bezeichnen, so behaupten wir damit, daß wir immer diese Zahl erhalten, in welcher Reihenfolge wir auch die Zählung vornehmen. Solange wir nur von der „Zahl" der einer Gesellschaft angehörigen Personen sprechen, sehen wir von deren individueller Verschiedenheit ab. Aber auch ohne die Zahl und die Persönlich-

keiten selbst zu ändern, können wir in der Gesellschaft einen Unterschied feststellen, je nachdem wir die Personen nach ihrem Alter, nach der Größe oder nach der alphabetischen Reihenfolge der Namen ordnen. Zwei Zahlen haben wir als gleich bezeichnet, wenn sich jede Einheit der einen mit irgend einer der andern paarweise zusammenstellen läßt, ohne daß von der einen oder von der andern Menge eine oder mehrere Einheiten übrigbleiben. Wenn wir aber nebst der Zahl auch noch die Reihenfolge der Einheiten ins Auge fassen, so können wir zwei aus geordneten Einheiten gebildete Gruppen nur dann als gleich auffassen, wenn bei der paarweisen Zusammenstellung die erste Einheit der einen Gruppe mit der ersten Einheit der zweiten und allgemein die r-te Einheit der ersten mit der r-ten Einheit der zweiten Gruppe zusammenfällt. So sind z. B. die aus den nämlichen Ziffern gebildeten Gruppen 17563 und 17563 einander gleich, weil immer dieselben Ziffern zusammenfallen, wenn wir sie übereinander anschreiben, während dies nicht der Fall ist, wenn wir die Gruppen 17563 und 13765 zur Deckung bringen wollen, obwohl auch hier beide Gruppen aus gleich vielen und denselben Ziffern bestehen.

Wenn wir zwei Gruppen von Dingen nur dann als gleich gelten lassen, wenn auch die Reihenfolge der Einheiten übereinstimmt, so bezeichnet man sie als „**Komplexionen**“ und die in ihnen vorkommenden Einheiten als „**Elemente**“. Ungleiche Komplexionen können sich sowohl hinsichtlich der Zahl der Elemente, als auch hinsichtlich der Reihenfolge der Elemente unterscheiden.

Wird in einer Komplexion mit einer bestimmten Anzahl von Elementen nur die Reihenfolge der Elemente verändert, so nennt man diesen Vorgang „permutieren“ und die einzelnen Stellungen heißen „**Permutationen**“. Man kann daher dieselben als Komplexionen mit gleicher Zahl von Elementen, aber verschiedener Stellung betrachten.

Um von zwei ungleichen Permutationen eine als die „höhere“ und die andere als die „niedrigere“ zu unterscheiden, müssen wir sowohl die „Stellen“ als auch die „Elemente“ ihrem Range nach unterscheiden, und zwar pflegt man die erste Stelle links als die höchste Stelle und jede nächste Stelle rechts als die nächstniedrigere zu bezeichnen, während der Rang der Elemente durch die Höhe der Ziffer oder durch die Reihenfolge der Buchstaben im Alphabet oder in einem Worte ausgedrückt werden kann. Als niederste Permutation ist diejenige zu betrachten, bei der das niederste Element an der höchsten Stelle und jedes nächsthöhere Element an der nächstniedrigeren Stelle steht. Die natürliche Ordnung der Elemente ist ihre niederste Permutation und die höchste Permutation diejenige,

bei der das höchste Element an der höchsten Stelle steht. Die Elemente 1 und 2 haben nur die Permutationen 1 2 und 2 1, also nur die niederste und die höchste Permutation. Bei mehr als zwei Elementen sehen wir zunächst darauf, ob die an den beiden niedersten Stellen stehenden Elemente die für ihre Stellung höchste Permutation darstellen. Dies ist bei der Permutation 1 4 2 5 3 der Fall, denn von den beiden Elementen 5 und 3 nimmt die höhere Ziffer die höhere Stelle ein. Von den drei Ziffern 2, 3 und 5 steht aber noch nicht die höchste auch an der höchsten Stelle; wir ersetzen daher 2 durch die nächsthöhere Ziffer, nämlich durch 3, und lassen die beiden übrigen Ziffern, 2 und 5, in der Stellung der niedersten Permutation, also in natürlicher Ordnung folgen und erhalten so die Ziffernfolge 3 2 5. Die nächsthöhere Permutation von 1 4 2 5 3 nimmt demnach die Form an: 1 4 3 2 5. Um die nächsthöhere Permutation zu finden, sucht man zuerst jene Gruppe der niedersten Stellen auf, deren Elemente schon die höchste Permutation bilden, und setzt an die nächsthöhere Stelle außerhalb dieser Gruppe das nächsthöhere Element derselben. Die Elemente an den noch höheren Stellen bleiben unberührt. Die letzte und höchste Permutation haben wir erreicht, wenn die Elemente in verkehrter Reihenfolge angeordnet sind, also das höchste derselben auch an der höchsten Stelle und jedes nächstniedrigere an der nächstniedrigeren Stelle steht.

Um die Zahl P_n der mit n Elementen durchführbaren Permutationen zu finden, erinnern wir uns, daß es nur zwei Permutationen zweier Elemente gibt und daher für $n = 2$ durch die Formel $P_2 = 2 \cdot 1$ ausgedrückt werden kann. Das aus allen natürlichen Zahlen von 1 bis n zusammengesetzte Produkt bezeichnen wir mit dem Namen „Faktorielle“ und schreiben dafür nach Kramp (1808) $n!$. Die Formel $P_n = n!$ erweist sich aber als allgemein gültig, wenn wir zeigen, daß $P(n+1) = (n+1)!$ richtig ist, wenn $P(n) = n!$. Bilden wir nämlich alle Permutationen mit $n+1$ Elementen, so muß jedes derselben so oft die höchste Stelle einnehmen, als die übrigen n Elemente unter sich Permutationen zulassen. Wir erhalten daher bei $n+1$ Elementen $(n+1)P(n) = (n+1)n! = (n+1)!$ verschiedene Permutationen, und die Formel $P(n) = n!$ hat deshalb allgemeine Gültigkeit, weil sie für $n = 2$ gültig ist.

Wenn unter den n Elementen einer Komplexion m einander gleiche Elemente auftreten, deren gegenseitige Vertauschungen keine neue Komplexionen ergeben, so müssen wir alle Permutationen als identisch auffassen, die sich nur durch die verschiedene Reihenfolge dieser Elemente unterscheiden. Bezeichnen wir die Zahl der Permutationen von n Elementen, unter denen sich $m (m < n)$ einander

gleiche befinden, mit $P_n(m)$, so gehen aus jeder derselben $m!$ neue hervor, wenn wir die m gleichen Elemente als verschieden auffassen und dann alle mit ihnen möglichen Permutationen ausführen. Es ist daher $m! \cdot P_n(m) = n!$ und $P_n(m) = \frac{n!}{m!}$.

Befindet sich unter den n Elementen, nebst der Gruppe von m gleichen Elementen auch noch eine zweite Gruppe von l gleichen Elementen, so ist die Zahl der verschiedenen Permutationen $P_n(m, l) = \frac{n!}{m!\, l!}$. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wenn unter den n Elementen m einander gleich und die $n - m$ übrigen ebenfalls untereinander gleich sind. In diesem Falle setzt man die Zahl $P_n(m, n - m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}$. Diese für den links stehenden Bruch eingeführte Bezeichnung liest man mit den Worten „n über m". Aus der Bedeutung dieses Ausdruckes geht hervor, daß $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$. Daß $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1$ gesetzt wird, läßt sich insofern rechtfertigen, als das $n!$ in der Nennerstellung die Gleichheit aller Elemente andeutet, und das Resultat 1 besagt daher, daß es bei durchwegs gleichen Elementen nur eine Permutation gibt. Bilden wir den Ausdruck $\binom{n}{k}$ für $k = 2, 3, 4$ usw., so ersehen wir aus $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!\,(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, daß er in dieser Form angeschrieben ebenso viele Faktoren im Zähler wie im Nenner hat, daß dieselben im Zähler von n angefangen immer um eine Einheit abnehmen und im Nenner von 1 anfangend um eine Einheit steigen.

Für alle Werte von $k < n$ ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ und $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!}$, also $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Endlich besteht noch die Gleichung $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$, denn es ist $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \frac{k+n-k+1}{k\,(n-k+1)} = \frac{(n+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,[(n+1)-k]!}.$$

Eine andere Aufgabe, die sich naturgemäß an den Begriff der Komplexion knüpft, beschäftigt sich mit der Bildung kleinerer Gruppen von Elementen, die dann als gleich gelten, wenn sie dieselbe Anzahl von Elementen enthalten und aus denselben Elementen bestehen. Solche Gruppen nennt man **Kombinationen,** und zwar Kombinationen **„*m*-ter Klasse“**, wenn dieselben aus m Elementen bestehen. Man unterscheidet ferner „Kombinationen m-ter Klasse **ohne Wiederholung**“, wenn in denselben jedes Element nur einmal, und „Kombinationen m-ter Klasse **mit Wiederholung**“, wenn einzelne Elemente wiederholt, ja sogar m-mal vorkommen können. Kombinationen, in denen nur die Reihenfolge der Elemente eine andere ist, gelten deshalb noch nicht als verschieden; man pflegt daher die Elemente immer nach ihrer natürlichen oder ursprünglichen Reihenfolge zu ordnen. Die Kombinationen, die nur ein Element enthalten, nennt man auch „Unionen“, die zweiter Klasse „Amben“, die dritter Klasse auch „Ternen“ und die vierter Klasse „Quaternen“.

Um aus n Elementen alle Kombinationen k-ter Klasse ohne Wiederholung abzuleiten, schreiben wir uns alle Permutationen der n Elemente auf und trennen von jeder von ihnen auf derselben Seite z. B. links die k ersten Elemente durch einen Strich ab. Die so gewonnenen Gruppen von k Elementen müssen alle möglichen Kombinationen enthalten, weil bei den Permutationen jedes Element an jede Stelle kommt, aber unter diesen $n!$ Kombinationen kommt zunächst jede mit derselben Anordnung ihrer Elemente so oft vor, als die rechts vom Strich befindlichen Elemente Permutationen zulassen. Während nämlich nur letztere permutiert wurden, blieben die links vom Strich stehenden ungeändert. Unter den letzteren fallen außerdem noch je $k!$ Komplexionen in eine einzige Kombination zusammen, weil die Verschiedenheit der Reihenfolge noch keine Verschiedenheit der Kombination bedingt. Wir müssen daher die Zahl der $n!$ Permutationen zuerst durch $(n-k)!$ und dann noch durch $k!$ dividieren, um die Zahl der Kombinationen k-ter Ordnung aus n Elementen zu erhalten, und bezeichnen sie mit $C_k(n)$. Es ist demnach $C_k(n) = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Jede Kombination der k-ten Klasse mit Wiederholungen einzelner Elemente, z. B. $a_1\,a_2\,a_2\,a_2\,a_5\,a_6$ kann in eine Kombination ohne Wiederholung verwandelt werden, indem wir den Index des Elementes an der höchsten Stelle unverändert lassen oder um 0 erhöhen, den des Elementes an der zweiten Stelle um 1, den des dritten Elementes um 2 usf. und endlich den an der k-ten Stelle um $k-1$ erhöhen, wodurch wir beim obigen Beispiel $a_{1+0}\,a_{2+1}\,a_{2+2}\,a_{2+3}\,a_{5+4}\,a_{6+5}$, also die Kom-

binationen $a_1 a_3 a_4 a_5 a_6 a_{11}$ erhalten. Dadurch wird die Indexzahl auch bei den gleichen Elementen verschieden, und die höchste Indexzahl n wird noch um $k-1$ vermehrt und steigt auf $n+k-1$ an. Andererseits können wir nach diesem Verfahren alle Kombinationen der Klasse k mit Wiederholung aus n Elementen in der Weise herstellen, daß wir zuerst alle Kombinationen der k-ten Klasse ohne Wiederholung aus $n+k-1$ Elementen bilden und dann vom Index des Elementes an der höchsten Stelle Null, vom Element an der nächstniedrigeren Stelle 1, vom Index des dritten Elementes 2 und vom Index des höchsten Elementes $k-1$ subtrahieren. So würde sich aus z. B. $a_2 a_3 a_5 a_5 a_9 a_{12}$ die Kombination $a_2 a_2 a_3 a_3 a_5 a_7$ ableiten lassen. Die Zahl der so erhaltenen Kombinationen der k-ten Klasse aus n Elementen mit Wiederholung ist daher $C_k'(n) = \binom{n+k-1}{k}$.

Eine dritte Art von Komplexionen bilden die **Variationen.** Darunter versteht man solche, die nur dann als gleich gelten, wenn nicht nur die Zahl und Art der Elemente, sondern auch ihre Reihenfolge dieselbe ist. Sie sind also „die Permutationen der Kombinationen". Wie bei letzteren unterscheidet man Variationen der verschiedenen **Klassen,** je nach der Zahl der in ihnen vorkommenden Elemente, und Variationen **„mit und ohne Wiederholung".** Die Variationen k-ter Klasse aus n Elementen ohne Wiederholung finden wir dadurch, daß wir die Elemente in den Kombinationen k-ter Klasse permutieren, und daher ist auch die Zahl derselben $V_k(n) = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Die „Variationen mit Wiederholung" lassen sich am einfachsten unmittelbar auf folgendem Weg anschreiben und zählen. Die Variationen „erster Klasse" können keine Wiederholung von Elementen besitzen, weil sie nur ein Element enthalten. Aus diesen n Variationen erster Klasse erhalten wir die Variationen zweiter Klasse mit Wiederholung, indem wir jedes von den n Elementen vor alle n Variationen erster Klasse, also vor alle n Elemente setzen. Wir müssen somit n^2 solcher Verknüpfungen vornehmen. Daher ist die Zahl der Variationen zweiter Klasse mit Wiederholung $V_2'(n) = n^2$. Aus diesen ergeben sich die Variationen dritter Klasse mit Wiederholung, wenn wir abermals vor jede frühere Variation jedes von den n Elementen setzen und somit n^3 Verknüpfungen vornehmen. So finden wir die Zahl der Variationen dritter Klasse mit Wiederholung $n^3 = V_3'(n)$, und da wir die Variationen mit Wiederholung fur jede folgende Klasse ebenfalls durch Verknüpfung mit allen n Elementen erhalten, so ist allgemein $V_k'(n) = n^k$.

Auch die Kombinatorik wurde schon von den Mathematikern des klassischen Altertums begründet und praktisch verwertet. Plutarch berichtet, daß Xenokrates in Athen (4. Jahrhundert v. Chr.) die aus gewissen Buchstaben herstellbaren Silben, daß der Stoiker Chrysippus und der Astronom Hipparch die Zahl der aus gewissen Axiomen ableitbaren Sätze zu berechnen wußten. Der bekannte Philosoph Aristoteles wandte die Kombinatorik an, um für die Zusammenstellung logischer Schlüsse ein vollständiges System zu gewinnen. Mit ihr befaßten sich Pappus in Alexandrien (3. Jahrhundert n. Chr.), Boethius in Rom (6. Jahrhundert n. Chr.), der Inder Bhaskara (12. Jahrhundert n. Chr.) und die schon öfter erwähnten italienischen Mathematiker Luca Paciuolo, Tartaglia und Cardano. Von größerer wissenschaftlicher Bedeutung sind dann die Arbeiten von Pascal in Paris († 1662), von Fermat in Toulouse († 1665) und die der deutschen Mathematiker Leibniz und Jakob Bernoulli. Die Bezeichnung $\binom{n}{m}$ stammt von Euler.

Der binomische Lehrsatz.

Alle Potenzen mit ganzzahligen Exponenten lassen sich für ein Binom $(a+b)$ durch einfache Multiplikation entwickeln. Um aber diese umständlichen Rechnungen nicht so oft wiederholen zu müssen, suchten schon die Mathematiker des Altertums jene gesetzmäßigen Beziehungen zu ermitteln, die aus den Angaben sofort das Endresultat abzuleiten gestatten. Euklid gibt bereits das Quadrat und den Kubus als Summe seiner Teilprodukte im Sinne unserer Formeln an:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Der binomische Lehrsatz dehnt diese Aufgabe, die Potenz eines Binoms unmittelbar aus den beiden Summanden a und b und dem Potenzexponenten abzuleiten, auf beliebige ganzzahlige Exponenten aus. Dieses allgemeinere Problem löste zuerst der arabische Mathematiker Omar Alchaijami im 12. Jahrhundert n. Chr. und eine aus dem 14. Jahrhundert stammende chinesische Abhandlung. Tschuh schi kih entwickelt die dabei verwendeten Koeffizienten ungefähr so wie wir. Unabhängig von ihnen bewältigte diese Aufgabe auch der deutsche Mathematiker Michael Stifel († 1567) in Jena und der französische Mathematiker Blaise Pascal (1662). Wir gelangen zu diesem Resultate auf dem Wege der Kombinatorik.

Mehrgliedrige Ausdrücke werden bekanntlich miteinander mul-

tipliziert, indem man jeden Summand des einen mit jedem Summand aller andern Faktoren multipliziert und die Teilprodukte addiert. Die Anwendung dieses Satzes zur Entwicklung des Produktes $(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)(a+b_4)(a+b_5)$ führt demnach zu folgendem Resultate: Wir erhalten eine Summe von Produkten, deren jedes aus fünf Faktoren besteht. Jeder Faktor stammt aus einem anderen Binome. Die Faktoren a vereinigen sich in jedem Summand zu einer Potenz von a, während die mit einem Index versehenen b eine Kombination der Elemente b_1, b_2, b_3, b_4 und b_5 darstellen. Die Gesamtheit der Teilprodukte enthält alle möglichen Kombinationen von der ersten bis zur fünften Klasse. Die Produkte, in denen a^4 vorkommt, umfassen fünf Glieder, weil die Zahl der Kombinationen erster Klasse aus fünf Elementen $C_1(5) = 5$ ist. Setzen wir in diesem Ausdruck alle b_n gleich b, so kommt die Zahl seiner Glieder als Koeffizient zum Vorschein, und es ist $a^4 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) = 5a^4 b$.

Die Produkte, welche a^3 enthalten, umfassen alle Kombinationen zweiter Klasse der fünf Elemente b_n. Deren Anzahl ist also $C_2(5) = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \binom{5}{2} = 10$, und die Summe dieser Glieder ist daher für gleiche Werte von b das Produkt $10a^3b^2$. Wenn es sich um die Multiplikation von n Binomen von der Form $(a+b)$ handelt, so ist im ersten Fall die Zahl der Glieder von der Form $a^{n-1} \cdot b$ gleich $C_1(n) = \binom{n}{1}$, der Glieder von der Form $a^{n-2} \cdot b^2$ gleich $C_2(n) = \binom{n}{2}$ und der Glieder von der Form $a^{n-k} \cdot b^k$ gleich $C_k(n) = \binom{n}{k}$.

Die n-te Potenz des Binoms $(a+b)$ ist eine Summe von Produkten, die nach fallenden Potenzen von a und steigenden Potenzen von b geordnet solche Koeffizienten aufweist, daß das Glied mit der Hauptgröße $a^{n-k} \cdot b^k$ den Koeffizienten $C_k(n) = \binom{n}{k}$ erhält und die Summe der Exponenten beider Hauptgrößen a und b in jedem Gliede gleich n ist.

Man schreibt eine solche Summe in der Form an:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

womit angedeutet wird, daß der rechts vom Summenzeichen Σ stehende Ausdruck so oft als Summand angeschrieben werden soll als n Einheiten enthält und daß der in ihm vorkommende Buchstabe k im ersten Gliede den Wert 0, im zweiten den Wert 1 und

so der Reihe nach alle Werte annehmen soll, bis $k = n$. Es ist mithin

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{und z. B.} \quad (a+b)^5 = \sum_{k=0}^{k=5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Die in diesen Summen vorkommenden sogenannten „Binominalkoeffizienten" $\binom{n}{k}$ lassen sich mechanisch auf folgendem Weg ableiten. Da zwischen irgend zwei aufeinanderfolgenden Binominalkoeffizienten die Beziehung besteht, die wir schon in der Kombinatorik abgeleitet haben, daß $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, so erhalten wir die Koeffizienten für die $(n+1)$-te Potenz aus der für die n-te Potenz, durch Addition von je zwei aufeinanderfolgenden Koeffizienten, und die auf diesem Wege nicht berechenbaren Koeffizienten des ersten und letzten Gliedes jeder Reihe sind stets gleich 1. Daraus ergibt sich das in der erwähnten chinesischen Schrift, dann wieder von Stifel und schließlich noch einmal von Pascal aufgestellte und gewöhnlich nach letzterem benannte **Pascalsche Dreieck** der Binominalkoeffizienten, in welchem jede Zahl die Summe der beiden, in der oberen Zeile stehenden Koeffizienten darstellt, zwischen welchen sie steht.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
usw.

Die Potenzen von $a - b$ lassen sich hieraus in der Weise ableiten, daß wir $a - b = a + (-b)$ setzen, woraus ersichtlich ist, daß in diesem Falle die sonst notwendige „Zeichenfolge" in einen „Zeichenwechsel" übergeht, weil die ungeraden Potenzen negativer Zahlen negativ, die der geraden aber positiv sind.

Setzen wir in der Binominalformel $a = b = 1$, so zeigt sich, daß die jeder Potenz angehörigen Binominalkoeffizienten dieselbe Potenz von 2 als Summe geben, denn es ist

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}.$$

Der Binominalsatz läßt in einem zweifachen Sinne eine Erweiterung zu. Dies kann erstens in der Weise geschehen, daß wir

nicht nur alle Potenzen eines Binoms, sondern auch die jedes Polynoms in ähnlicher Form zu entwickeln suchen und damit den entsprechenden „polynomischen Lehrsatz" aufstellen, womit sich zuerst Leibniz (1695) in Hannover, de Moivre (1697) in London und Jakob Bernoulli (1713) in Basel befaßten. Eine Erweiterung anderer Art, die von viel größerer Bedeutung ist, strebte der tiefsinnige Newton an, indem er schon in seinem mathematischen Erstlingswerke nachzuweisen suchte, daß der Binominalsatz nicht nur für ganze Werte von n, sondern auch für gebrochene und negative Zahlen gültig bleibt. Exakter lieferte diesen Beweis erst Euler im Jahre 1774, und der norwegische Mathematiker Abel erwies (1826) seine Gültigkeit auch für komplexe Werte von n.

Politische Arithmetik.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wenn der Kaufmann aus dem Einkaufspreis, aus den Verkehrsauslagen, den sogenannten „Spesen", und dem üblichen Gewinnstanteil den Verkaufspreis festsetzt, oder der Gläubiger nach der mit dem Schuldner vereinbarten Verzinsung den Endwert eines Kapitals berechnet, so handelt es sich darum, aus vorhandenen Angaben eine bestimmte Zahl abzuleiten, und auf Grund der angestellten Berechnung werden dann die rechtlichen Forderungen erhoben. In einer ganz andern Lage befinden sich der Physiker und der Techniker, wenn sie die Wirkung eines in der Natur mit oder ohne ihr Zutun hervorgerufenen Vorganges vorausberechnen wollen. Selbst dann, wenn ihnen genau geltende Gesetze bekannt wären, müßten sie sich mit unvollständigen Zahlen begnügen, weil die Messungen, von welchen ihre Berechnungen ausgehen, zu unvollständigen Zahlen führen. Daher erweisen sich alle Ergebnisse der Rechnungen als mit einem Fehler behaftet. Es gibt aber noch viele Ereignisse, über deren Gründe und Gesetze wir wenig oder gar nichts wissen, oder die wir nicht zu verfolgen in der Lage sind, die sogenannten Zufälle, deren Eintreten zwar physikalisch notwendig ist, aber vom dabei Beteiligten und daran Interessierten nicht vorausgesehen werden kann. Trotzdem lassen sich auch solche Fälle der Berechnung unterziehen, wenn man nicht jeden Fall für sich, sondern ein möglichst großes Gebiet ähnlicher Fälle in Betracht zieht und die durch Aufzeichnung aller einzelnen Fälle, also die durch „Statistik" gewonnenen Beobachtungen mit der Zahl der vorhandenen Möglichkeiten vergleicht. Wenn wir mit unsern Blicken nicht am Schicksal des

Einzelnen haften, sondern das Gesellschaftsleben einer ganzen Stadt, eines ganzen Landes ins Auge fassen, so sehen wir, daß sich der seltsame Unglücksfall des Einzelnen in eine ständige Rubrik ähnlicher Unglücksfälle einreihen läßt. Was beim Individuum fast für unmöglich gilt, wird in der „Gesellschaft“ zur bekannten Regel, läßt sich „arithmetisch“ verfolgen und ist mithin Gegenstand der „politischen Arithmetik“.

Der mathematische Ausdruck der Beziehung zwischen den tatsächlich eintretenden und den unter gewissen Bedingungen möglichen Ereignissen bildet den Gegenstand der „Wahrscheinlichkeitsrechnung“.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt über den Ausgang eines einzelnen Ereignisses gar nichts aus, sondern nur über das Verhältnis der nach einer Hinsicht als günstig aufgefaßten Vorfälle zu allen möglichen Fällen, falls im Berechnungsgebiete ein empirisch festgestelltes Verhältnis fortbesteht. Beim Würfelspiel kommt es z. B. darauf an, durch Zufall möglichst viele „Augen“ zu werfen. Es sind sechs verschiedene Würfe möglich, nämlich 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Die Erfahrung lehrt, daß auch ein vollständig regelmäßig gebauter Würfel keineswegs bei je sechs Würfen einmal die Augenzahl 6 aufweist; er würde aber viel öfter, ja sogar regelmäßig diese Zahl ergeben, wenn der Schwerpunkt des Würfels in jener Fläche liegen würde, welche dieser Augenzahl gegenüberliegt. Andererseits müßte auch ein ähnlicher physikalischer Grund dafür da sein, wenn gerade die Augenzahl 6 viel seltener als andere Zahlen auftreten würde. Die hier maßgebenden Gründe liegen bei regelmäßigen Würfeln außerhalb unseres Beobachtungskreises, und es ist also auch hier nur die Erfahrung, die uns sagt, daß bei diesem oder jenem Würfel die Augenzahl 6 leichter fällt als andere oder nicht. Von derartigen Erwägungen ausgehend gelangen wir zu folgenden Resultaten.

Als die absolute oder einfache mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bezeichnen wir das Verhältnis der ihm günstigen Fälle zur Zahl der möglichen Fälle.

Wir setzen $w = \frac{g}{m}$, wenn g die Zahl der günstigen, m die der möglichen Fälle und w die absolute Wahrscheinlichkeit bedeutet.

Sind alle Fälle, in denen das Eintreten eines Ereignisses in Frage kommt, demselben günstig, d. h. tritt das Ereignis in allen Fällen ein, die in Frage kommen, so sagen wir, daß es „gewiß“ sei, und mit dieser Bestimmtheit erwartet der Physiker alle Naturerscheinungen, deren notwendige und hinreichende Voraussetzungen

vorhanden sind. Mit derselben Bestimmtheit stellt er das Eintreten eines Vorganges in Abrede, wenn die notwendigen Bedingungen nicht erfüllt sind. In einem andern als im mathematischen Sinn bezeichnet man ein Ereignis als „wahrscheinlich", wenn $w > \frac{1}{2}$ und als unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist, denn im ersten Fall erwartet man bereits das Eintreten, ohne daß man dazu berechtigt ist, weil die „mathematische" Wahrscheinlichkeit über den Ausgang eines einzelnen Ereignisses naturgemäß gar nichts aussagen kann, außer wenn es sich dabei um die Gewißheit oder Unmöglichkeit handelt. Erstere drückt man daher auch damit aus, daß man $w = 1$ setzt und für letztere ist $w = 0$.

$w' = \frac{m-g}{m} = 1 - w$ nennt man die „entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit", womit gesagt sein soll, daß diese Zahl das Maß der Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten des Ereignisses darstellt.

Unter „relativer Wahrscheinlichkeit" versteht man das Verhältnis der Wahrscheinlichkeitsmaße zweier Ereignisse.

Sind a Fälle dem Ereignis A günstig und b Fälle dem Ereignis B günstig, so ist die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben durch $w_a' = \frac{a}{a+b}$, und die von B durch $w_b' = \frac{b}{a+b}$. Das Eintreten des einen **oder** des anderen Ereignisses bildet hier den Bereich der möglichen, und das Eintreten des einen Ereignisses enthält die nur für dieses günstigen Fälle. Kennen wir zugleich die absolute Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse, die für A bei m Möglichkeiten $w_a = \frac{a}{m}$ und für B bei denselben m Möglichkeiten $w_b = \frac{b}{m}$ ist, so folgt aus $w_a' = \frac{a}{a+b} = \frac{a:m}{a:m + b:m} = \frac{w_a}{w_a + w_b}$, daß sich die relative Wahrscheinlichkeit auch aus den absoluten Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse nach derselben Formel berechnen läßt.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Bei der Berechnung der absoluten und relativen Wahrscheinlichkeit handelt es sich um das Maß einer einzelnen Größe, deren Wert aus einer Reihe beobachteter Ereignisse abgeleitet wird. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit befaßt sich mit der Frage, wie mit solchen Größen die einfachsten Rechnungsoperationen, insbesondere die Addition und Multiplikation durchgeführt werden. Die Beantwortung derselben liegt in den beiden folgenden Sätzen:

Die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines von mehreren Ereignissen ist gleich der Summe der absoluten Wahrscheinlichkeitswerte für das Eintreten jedes einzelnen Ereignisses.

Es seien a Fälle dem Ereignisse A und b Fälle dem Ereignisse B günstig. Betrachten wir dann alle jene Fälle als günstig, in welchen „entweder das eine oder das andere" eintritt, so bilden dieselben $a+b$ günstige unter m möglichen Fällen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten „des einen oder des andern" $w = \frac{a+b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = w_a + w_b$. Die Summe zweier oder mehrerer Wahrscheinlichkeiten entspricht also jener Form von Urteilen, die man in der Logik als „disjunktive" bezeichnet und mit Hilfe der Bindewörter „entweder — oder" ausdrückt.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse ist gleich dem Produkt der absoluten Wahrscheinlichkeitswerte der einzelnen Ereignisse.

Wenn von m Möglichkeiten a dem Ereignisse A und von n andern Möglichkeiten b dem Ereignisse B günstig sind, so steigt die Zahl der Möglichkeiten für das Zusammentreffen dieser beiden Ereignisse auf mn Fälle, denn mit jeder der m Möglichkeiten für A kann jede von den n Möglichkeiten für B zusammentreffen. Aber auch die Zahl der günstigen Fälle beträgt für das Zusammentreffen beider Ereignisse ab, weil jeder der a für A günstigen Fälle mit jedem der b für B günstigen Fälle zusammentreffen kann. Die absolute Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse w ist daher $w = \frac{ab}{mn} = \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = w_a \cdot w_b$.

Unter dem Begriff „Zusammentreffen" darf man sich keineswegs nur ein zeitliches oder örtliches Zusammentreffen vorstellen, sondern es handelt sich hier nur um eine logische Verknüpfung, die schon dann vollzogen ist, wenn wir die Verknüpfung zweier oder mehrerer Ereignisse als ein neues Ereignis, als einen neuen, in die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einzuzählenden Fall betrachten. Dies ist z. B. auch der Fall, wenn ein und dasselbe Ereignis sich mehrmals wiederholen oder gerade dann eintreten soll, wenn wir es, ohne es physisch zu verursachen, von vornherein feststellen. Ist demnach die absolute Wahrscheinlichkeit für das einmalige Eintreten eines Ereignisses w, so ist die Wahrscheinlichkeit für die n-malige unmittelbare Wiederholung desselben oder für sein Eintreten in n vorherbestimmten Fällen w^n. Wir sagen unter solchen Umständen auch: Es soll das Ereignis A „und" das

Ereignis *B* eintreten, und drücken also das Zusammentreffen mehrerer Ereignisse mit Hilfe der Bindewörter „und“ oder „sowohl — als auch“, mithin durch ein „konjunktives“ Urteil aus. Die in der Logik als konjunktiv bezeichneten Urteile entsprechen daher bei Aussagen über die Wahrscheinlichkeit dem „Produkte“ der einzelnen Urteile, aus denen sie zusammengesetzt sind, während die „disjunktiven“ Urteile eine „Summe“ von Urteilen darstellen.

Die folgenden auf die Wahrscheinlichkeit bezogenen Urteilsformen lassen sich somit arithmetisch in der daneben stehenden Form ausdrücken:

Ist w_a die absolute Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses *A* und w_b die für das Ereignis *B*, so ist Wahrscheinlichkeit dafür,

daß entweder *A* oder *B* eintritt: $w_a + w_b$,

daß entweder *A* eintritt oder *B* nicht eintritt: $w_a + (1 - w_b) = w_a - w_b + 1$,

daß sowohl *A* als auch *B* eintritt: $w_a \cdot w_b$,

daß *A* eintritt, *B* aber nicht eintritt, daß also nur *A* eintritt: $w_a \cdot (1 - w_b)$,

daß weder *A* noch *B* eintrete: $(1 - w_a) \cdot (1 - w_b)$,

daß nur das eine oder das andere eintrete: $w_a (1 - w_b) + (1 - w_a) \cdot w_b = w_a + w_b - 2 w_a \cdot w_b$.

Die drei Möglichkeiten, daß beide Ereignisse zusammentreffen, daß entweder nur das eine oder nur das andere, oder endlich keines von beiden Ereignissen eintrete, füllen offenbar den Bereich aller Möglichkeiten aus, und daher muß ihre Summe den Charakter einer Gewißheit haben und der Wahrscheinlichkeitszahl 1 entsprechen. In der Tat ist $w_a \cdot w_b + [w_a + w_b - 2 w_a \cdot w_b] + (1 - w_a)(1 - w_b) = w_a \cdot w_b + w_a + w_b - 2 w_a \cdot w_b + 1 - w_a - w_b + w_a w_b = 1$.

Der mathematische Hoffnungswert. Als den Barwert eines erst nach mehreren Jahren fälligen Kapitals haben wir jenen Wert bezeichnet, der nach dem vereinbarten Zinsfuß am Fälligkeitstermine samt den Zinseszinsen den angegebenen Betrag erreicht. Wie hier die Verschiebung des Fälligkeitstermines dem Kapital einen andern Wert gibt, so hängt der Wert eines in Aussicht gestellten Kapitales auch von der Wahrscheinlichkeit seiner Erlangung ab. Wer keine Aussicht hat, ein bestimmtes Kapital in seinen rechtmäßigen Besitz zu bringen, für den hat dasselbe den Hoffnungswert Null. Das Wechselrecht garantiert bei einem zahlungsfähigen Geschäftshaus den vollen Betrag des auf eine bestimmte Summe ausgestellten Wechsels. Der ausgesprochene Zweifel an der Zahlungsfähigkeit des Wechselausstellers drückt aber im Bankverkehr den Wert des Wechsels herab, weil damit der Hoffnungswert für die rechtzeitige und voll-

wertige Einlösung gesunken ist. Der mathematische Hoffnungswert stellt bei einer Summe, deren Fälligkeit vom Eintreten eines zufälligen Ereignisses abhängt, jenen Wert dar, der sich zur vollen Summe wie die Wahrscheinlichkeit zur Gewißheit verhält. Dies ist besonders bei den sogenannten Glücksspielen der Fall. Der Einsatz beim Spiele garantiert dem Spieler nur die Möglichkeit eines Gewinnes. Die Summe aller Einsätze soll der Summe der Hoffnungswerte gleich sein. Es kommt aber auch sehr oft vor, daß der Unternehmer des Spieles aus den Einnahmen zunächst die mit dem Spiele verbundenen Nebenauslagen deckt, daß ein bestimmter Betrag einem allen Mitspielern bekannten Zwecke zugeführt wird oder endlich, daß von vornherein nur ein Teil des Einsatzes zur Auszahlung gelangt. Letzteres ist besonders bei der **Nummern-Lotterie** der Fall und traf bei derselben schon seit ihrer Entstehung zu.

In Genua wurden um 1620 der dortigen Verfassung zufolge aus den 100 Senatoren fünf durch das Los ausgewählt, um die höchsten Ehrenstellen zu bekleiden. Das benützte der Ratsherr Benedetto Gentile, um eine Wette einzugehen, ob auf den oder jenen Senator das Los fiele, und einige Bankhäuser setzten den 20000fachen Einsatz auf das Erraten aller fünf Namen. Später ging man davon ab, diese Wetten gerade an die Auslosung irgend welcher Senatoren zu knüpfen und benützte zu solchen Wetten die Ziehung von fünf aus 90 Nummern, die in einer Urne verschlossen waren. So entwickelte sich die Nummernlotterie, welche sich alsbald über die meisten Staaten verbreitete, aber wegen vieler damit verbundener Unzukömmlichkeiten später wieder abgeschafft oder unter Staatsaufsicht gestellt wurde. Das Erraten einer von den fünf gezogenen Zahlen wird als ein „Auszug", das Erraten zweier Nummern als „Ambo", bei drei als „Terno", bei vier als „Quaterno" und bei fünf als „Quine" bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, „eine" Nummer zu erraten, ergibt sich aus der Zahl der Möglichkeiten, deren 90 vorhanden sind, und aus der Zahl der günstigen Fälle, nämlich daß die erwartete Nummer unter den fünf gezogenen Nummern sei. Die Zahl der Möglichkeiten entspricht also der Zahl der Unionen aus 90 Elementen und die Zahl der günstigen Fälle der Zahl der Unionen aus fünf Elementen, und daher ist die Wahrscheinlichkeit in diesem Falle $w = \frac{C_1(5)}{C_1(90)} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$.
Daher sollte beim Erraten „einer" Nummer der 18fache Betrag den Gewinn bilden, während nur der 14fache ausbezahlt wird. Dies hat darin seinen Grund, weil ja auch nicht regelmäßig alle 90 Nummern gesetzt werden und oft geradezu nur solche Nummern gewählt werden, deren Auszug wahrscheinlicher ist, weil sie schon lange nicht mehr

gezogen wurden. Ähnliches gilt für den Ambo. Da die Reihenfolge der Nummern für die Ziehung als gleichgültig angesehen wird, so ist die Zahl der Möglichkeiten gleich der Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung, zweiter Klasse aus 90 Elementen und die Zahl der günstigen Fälle gleich der Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung zweiter Klasse aus fünf Elementen, denn die zwei erwarteten Nummern können in $C_2(5)$ verschiedenen Stellungen unter den gezogenen fünf Nummern auftreten. Die Wahrscheinlichkeit, einen Ambo zu machen, ist daher $\frac{C_2(5)}{C_2(90)} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} : \frac{90\cdot 89}{1\cdot 2} = 10:4005 = 1:400{\cdot}5$.

Statt also für einen erratenen Ambo den 400fachen Einsatz als Gewinst anzusetzen, wird aus dem eben angegebenen Grunde nur der 240fache Betrag ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeit, einen Terno zu machen, ist aus denselben Gründen $C_3(5):C_3(90)$ $= \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} : \frac{90\cdot 89\cdot 88}{1\cdot 2\cdot 3} = 1:11748$.

Da auf 11 748 Einsätze ein einziger Gewinst entfällt, so ist damit die Redensart „einen Terno in der Lotterie machen“ zur Bezeichnung eines seltenen Glückes immerhin begründet. Für einen Terno wird aber nur der 4800fache Einsatz ausbezahlt und Quaterno und Quine werden als solche überhaupt nicht angenommen. Die genuesischen Banken stellten für das Erraten aller fünf Ratsherrn die Auszahlung des 20000fachen Betrages in Aussicht, während die Wahrscheinlichkeit 1 : 75287520 beträgt.

Unter **Klassenlotterie** versteht man den Verkauf von Scheinen, welche zum Empfange eines gewissen Gewinstbetrages berechtigen, falls die Nummer des Scheines „gezogen“ wird, während sonst der Schein nach der Ziehung wertlos wird. Die Zahl dieser Scheine ist gewöhnlich sehr groß und steht zur Zahl der „Treffer“ in einem vorher bestimmten Verhältnis. Werden n Scheine ausgegeben, von denen einer den Gewinst G_1, ein zweiter den Gewinst G_2, ein dritter G_3, ein vierter G_4 und ein fünfter G_5 als Gewinst bezieht, so ist für jeden Scheinbesitzer die Wahrscheinlichkeit, den ersten Treffer zu machen, $\frac{1}{n}$ und daher der Hoffnungswert für denselben $\frac{G_1}{n}$. Er kann aber auch statt des ersten den zweiten Treffer machen, und für diesen beträgt der Hoffnungswert $\frac{G_2}{n}$; für den dritten Treffer ist sein Hoffnungswert $\frac{G_3}{n}$, für den vierten $\frac{G_4}{n}$ und für den fünften $\frac{G_5}{n}$. Jeder Schein hat daher den Wert $\frac{G_1}{n} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n} + \frac{G_4}{n} + \frac{G_5}{n}$

$= \frac{1}{n}(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5) = \frac{G}{n}$, wenn G die Summe aller Gewinstbeträge darstellt.

Die „Lose“ sind Scheine, durch welche dem Besitzer für den Tag der Ziehung die Auszahlung eines entweder verzinslichen oder unverzinslichen Betrages, des sogenannten Nennwertes, zugesichert wird, mit dem noch ein gewisser größerer Treffer verbunden sein kann, wenn die Scheinnummer mit einer durch Ziehung bestimmten Gewinstnummer übereinstimmt. Gewöhnlich werden einzelne Gruppen von Scheinen zu Serien vereinigt und als solche mit eigenen Nummern versehen. Alljährlich werden gewisse Serien durch das Los zur Auszahlung bestimmt und unter den darin vorkommenden Losscheinen durch eine zweite Ziehung gewisse mit größeren Gewinstbeträgen bedacht. Man unterscheidet daher in diesem Falle jährlich eine „Serien- und eine Prämienziehung“. Ist n die Gesamtzahl der nach mehrmaligen Ziehungen noch nicht zur Auszahlung gelangten Lose und r die Zahl der Lose, für die im laufenden Jahre die Summe G als Prämie oder Gewinst ausgezahlt wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes Los in diesem Jahre gezogen wird, $\frac{r}{n}$ und der Hoffnungswert eines solchen beträgt im Durchschnitt $\frac{G}{n}$, denn der Durchschnittswert aller in diesem Jahre verlosten Scheine ist $\frac{G}{r}$ und der mathematische Hoffnungswert dieses Betrages ist daher $\frac{r}{n} \cdot \frac{G}{r} = \frac{G}{n}$.

Der Besitzer eines solchen Loses kann dasselbe zu einem weiteren Verlosungsspiel benützen, indem er einen „Anteilschein“ ausgibt und sich durch denselben verpflichtet, dem Besitzer den ganzen Gewinst abzutreten, wenn dieser ihm sofort den Hoffnungswert des Durchschnittsbetrages auszahlt, aber auf die Prämie verzichtet, falls auf dieses Los kein Treffer entfällt. Ein solcher Anteilschein heißt „Promesse“.

Das Versicherungswesen.

Alle Versicherungsformen gehen darauf hinaus, den durch ein einmaliges Ereignis hervorgerufenen materiellen Schaden durch viel geringere, aber jährlich oder bei günstiger Gelegenheit zu entrichtende Beträge auszugleichen. Das Ereignis, welches den Schaden anrichtet, kann entweder ein solches sein, das nur zufällig und unter bestimmten Gründen eintritt, oder es tritt, wie z. B. der Todes-

fall, früher oder später unter allen Umständen ein. Im ersteren Falle frägt es sich, ob man sich nicht auf die naturgemäße Abwehr beschränken soll, die auch mit gewissen Kosten verbunden ist. So ist die Feuersgefahr in Städten dadurch wesentlich vermindert worden, daß man im Verordnungswege eine möglichst feuersichere Bauart erzwingt. Die mit großen Kosten verbundenen Wildbachverbauungen und Uferschutzbauten sind auch naturgemäße Versicherungen gegen die noch viel größeren Schäden, welche ein Hochwasser herbeiführt. Die gegen die Ausbreitung epidemischer Krankheiten getroffenen hygienischen Vorkehrungen können auch als Versicherungen gegen Krankheit und vorzeitigen Tod gelten.

Trotz der anerkennenswerten Erfolge solcher Schutzmaßregeln gibt es aber noch immer viele Fälle, wo die Abwehr versagt und manchen Ereignissen, wie z. B. dem Hagelschlag und der Mißernte infolge ungünstiger Witterung, stehen wir überhaupt machtlos gegenüber. Um wenigstens die vernichtenden Folgen großer Unglücksfälle etwas zu mildern, kann man den Schaden auf sehr viele freiwillig zu diesem Zwecke vereinigte Personen oder kraft gesetzlicher Bestimmungen auch zwangsweise auf alle gefährdeten Personen verteilen, die dann entsprechend ihren Interessen belastet und in gleicher Weise eine den erlittenen Verlusten entsprechende Entschädigung beanspruchen können. Derartige Verträge lassen sich in London und Paris schon im 16. Jahrhundert nachweisen. Ein sehr großer Brand in London im Jahre 1666 gab endlich Veranlassung zur Gründung des „Fire-office“ des Nicolas Barbon, einer Versicherungsanstalt gegen Feuersgefahr, aber erst im 19. Jahrhundert kamen ähnliche Anstalten in größerer Zahl und Ausdehnung auch auf dem Kontinente, insbesondere in Deutschland zustande, wo Ernst Wilhelm Arnoldi dazu die erste Anregung gab. Solche Institute gehen vielfach von einer geschlossenen Gesellschaft von Unternehmern aus, die von den sich Versichernden jährlich einen dem Werte der gefährdeten Objekte angemessenen Betrag erheben und sich verpflichten, jeden Brandschaden im vertragsmäßigen Umfange zu vergüten. Die Unternehmer teilen unter sich im Verhältnisse ihrer zum Unternehmen beigesteuerten Kapitalien den eventuellen Gewinn als „Dividende“ der damit konstituierten „Aktiengesellschaft“. Andere Versicherungsgesellschaften sind so eingerichtet, daß jeder Versicherte damit auch schon Teilnehmer an der Aktiengesellschaft wird, oder es wird endlich bei den auf dem „Prinzip der Wechselseitigkeit“ beruhenden Gesellschaften alljährlich der gesamte Schaden auf alle Teilnehmer im Verhältnis der Höhe der versicherten Beträge verteilt. Ist K das ganze bei einer Gesellschaft

versicherte Kapital und S der in einem Jahr zur Entschädigung ausgezahlte Betrag, so kann man letzteren in Prozenten von K ausdrücken und findet $S = \frac{pK}{100}$ und daraus $p = \frac{100 \cdot S}{K}$. Ist dann ein einzelner Teilnehmer für den Betrag k versichert, so hat er in diesem Jahr den Beitrag $R = \frac{pk}{100} = \frac{100\,S}{K} \cdot \frac{k}{100} = \frac{S}{K} \cdot k$ zu entrichten. Die mit dem Geschäftsgebaren der Gesellschaft verbundenen Kosten werden durch eine entsprechende Erhöhung des zur Berechnung der Beiträge verwendeten Prozentsatzes hereingebracht.

Einen wesentlich verschiedenen Charakter haben die „Lebens- und Unfallversicherungen". Die wichtigsten und häufigsten Fälle von Lebensversicherung lassen sich auf folgende Grundformen zurückführen.

Die **Versicherung auf den Erlebensfall** besteht darin, daß jemand einmal an die Versicherungsgesellschaft einen gewissen Betrag, die **Mise,** entrichtet und dafür nach einer vorausbestimmten Reihe von Jahren ein festgestelltes Kapital ausbezahlt erhält, falls er zu dieser Zeit noch lebt, während andernfalls der eingezahlte Betrag der Gesellschaft verbleibt.

Bei der **Rentenversicherung** erlegt der sich Versichernde einen gewissen Betrag, die Mise, und bezieht dafür lebenslänglich eine der Mise und seinem Alter entsprechende Rente.

Die **Versicherungen auf den Todesfall** erfolgen entweder in der Weise, daß jemand bei der Gesellschaft ein gewisses Kapital, die Mise, erlegt, wogegen die Gesellschaft nach seinem Ableben seinen gesetzmäßigen Erben eine der Mise und dem Zeitpunkt der Versicherung entsprechende Summe ausbezahlt, oder der Versicherte zahlt von einem bestimmten Jahre angefangen bis zu seinem Tode der Gesellschaft eine ebenfalls der vereinbarten Versicherungssumme und seinem Alter angepaßte „Prämie", während seine Erben sofort nach seinem Tode die Versicherungssumme ausbezahlt erhalten.

Den Barwert der ausständigen Kapitalien oder Renten bezeichnet man in allen diesen Fällen als „Versicherungspolizze", solange noch kein Teil derselben zur Auszahlung gelangt ist und als „Prämienreserve", wenn bereits ein Teil ausbezahlt, ein anderer Teil aber erst später fällig ist.

In allen diesen Fällen spielt die voraussichtliche Lebensdauer des Versicherten, sowohl für die Versicherungsgesellschaft, wie auch für den einzelnen Interessenten die Hauptrolle. Der erste, der darüber Berechnungen anstellte, war Edmund Halley (1693), der aber von der nicht immer zutreffenden Voraussetzung ausging,

daß sich die Bevölkerungszahl nicht wesentlich ändere, also „stabil“ sei, was zwar in einzelnen Fällen, aber gerade in neuerer Zeit, besonders in den großen Städten, nicht zutrifft. Im Jahre 1741 gab Johann Peter Süßmilch die erste auf Grund statistischer Untersuchungen ausgearbeitete Sterblichkeitstafel heraus, die später unter dem Namen **Süßmilch-Baumannsche Sterblichkeitstafeln** lange Zeit ausschließlich verwendet wurde. Diese enthält drei Spalten, deren erste eine bestimmte Alterszahl, die zweite die Zahl derjenigen angibt, die von 1000 im ersten Jahr Geborenen durchschnittlich dieses Alter erreichen, und die dritte enthält die in diesem Jahr erfolgten Todesfälle. Durch Subtraktion der letzteren Zahlen von der Zahl der Lebenden erhält man die Zahl der Lebenden für das folgende Jahr. Solche Tafeln lassen sich jederzeit aus dem jeweiligen Bevölkerungsstande ableiten, ohne etwa von je 1000 Geborenen bei jedem einzelnen die Lebensdauer abzuwarten, was praktisch unausführbar und überdies zwecklos wäre, weil so kein Bild der jeweils herrschenden Lebensverhältnisse zustande käme. Bedeutet t_n die Zahl derjenigen, die im n-ten Lebensjahre sterben und l_n die Zahl der Lebenden, die gerade im n-ten Lebensjahre stehen, so ist offenbar $t_n = l_n - l_{n+1}$ und daher für l_0 Einwohner $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_n = (l_0 - l_1) + (l_1 - l_2) + (l_2 - l_3) + (l_3 - l_4) + \ldots + (l_{n-1} - l_n) = l_0 - l_n = l_0$, denn $l_n = 0$, weil n schließlich so groß wird, daß dieses Alter niemand erreicht. Wenn wir demnach von allen in einem Jahre Verstorbenen das Alter kennen, so können wir in jedem Jahre eine solche Tafel zusammenstellen und, um verläßliche Durchschnittszahlen zu erhalten, die Beobachtungen mehrerer Jahre zusammenziehen. Die so gewonnenen Zahlen gelten zunächst allerdings nur für den Beobachtungsort und eine gewisse Zeit, also nicht allgemein und insbesondere nicht gerade für die Bevölkerungskreise, die sich zu versichern pflegen. Es gibt auch verschiedene für Männer und Frauen. Daher haben die Versicherungsgesellschaften vielfach eigene, ihren Kundschaften angepaßte Tafeln auf Grund der ihnen reichlich zur Verfügung stehenden Erfahrungen zusammengestellt und ihren Berechnungen zugrunde gelegt. Die Sterblichkeitstafeln werden folgendermaßen verwendet.

Mit Hilfe derselben läßt sich zunächst die mathematische Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der eine im n-ten Jahre stehende Person ein um p Jahre höheres Alter erreicht. l_n ist nämlich die Zahl der möglichen und l_{n+p} die Zahl der günstigen Fälle und daher die mathematische, d. h. die auf den Durchschnittswert sich beziehende Wahrscheinlichkeit, noch p Jahre zu leben $\frac{l_{n+p}}{l_n}$ und sie

nicht zu erreichen $1 - \frac{l_{n+p}}{l_n} = \frac{l_n - l_{n+p}}{l_n}$.

Die wahrscheinliche Lebensdauer einer im n-ten Lebensjahre stehenden Person ergibt sich aus der Erwägung, daß für ihr Todesjahr die Wahrscheinlichkeit, es zu überleben, gleich groß sein muß, wie die Wahrscheinlichkeit, es nicht zu überleben. Es ist daher $\frac{l_{n+x}}{l_n} = 1 - \frac{l_{n+x}}{l_n}$ und $l_{n+x} = \frac{l_n}{2}$; wir suchen deshalb in der Tafel jenes Lebensalter m auf, für welches die Zahl der Lebenden $\frac{l_n}{2}$ ist und finden so $x = m - n$, wenn $m = n + x$.

Wenn jemand im n-ten Lebensjahre die Mise M erlegt, um nach p Jahren das Kapital K zu beheben, falls er noch lebt, so braucht er als Mise vom Barwert des auszuzahlenden Kapitales K nur den Hoffnungswert zu erlegen, und dieser beträgt mithin $M = \frac{l_{n+p}}{l_n} \cdot \frac{K}{q^p}$ $= \frac{l_{n+p}}{q^p \cdot l_n} \cdot K$, wenn q der Aufzinsungsfaktor ist.

Wenn sich jemand durch die einmal erlegte Mise eine lebenslänglich auszubezahlende Rente R erwerben will, so können wir dieselbe als die Summe aller jener Beträge auffassen, die, wie im vorher besprochenen Falle, für sämtliche Lebensjahre die Auszahlung eines Kapitales R sichern. Es ist daher in diesem Falle

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_{96} = \frac{l_{n+1}}{l_n}\frac{R}{q} + \frac{l_{n+2}}{l_n}\frac{R}{q^2} + \frac{l_{n+3}}{l_n}\frac{R}{q^3}$$

$$+ \ldots + 0 = \left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\frac{1}{q} + \frac{l_{n+2}}{l_n}\frac{1}{q^2} + \frac{l_{n+3}}{l_n}\frac{1}{q^3} + \ldots\right) \cdot R = r_n \cdot R.$$

Die Reihe der Summe bricht ab, sobald die Werte von l_{n+p} gleich Null sind, was in den meisten Sterblichkeitstafeln für $n = 96$ der Fall ist. Für $R = 1$ erhalten wir so einen Betrag $r_n = \frac{l_{n+1}}{l_n q} +$ $\frac{l_{n+2}}{l_n \cdot q^2} + \frac{l_{n+3}}{l_n \cdot q^3} + \ldots$ der für jeden Wert von q einen bestimmten Wert hat und als „Barwert der Renteneinheit“ bezeichnet wird. Mit Hilfe dieses für verschiedene Zinsfußbeträge und alle Werte von n in Form einer Tabelle zusammengestellten Zahlen läßt sich für jeden Wert von R die entsprechende Mise durch einfache Multiplikation ableiten, und so finden wir für den Zinsfuß q und die Rente R die Mise $M = r_n \cdot R$, falls der Erleger bei der Versicherung das Alter von n Jahren hat.

Auch die folgenden Aufgaben lassen sich mit Hilfe von der-

artigen für den Barwert der Renteneinheit aufgestellten Tafeln erledigen.

Geht jemand im n-ten Lebensjahr die Versicherung auf den Todesfall ein, daß dann an seine Erben die Summe K ausbezahlt werden soll, so kann die entsprechende Mise folgendermaßen berechnet werden. Wenn sich l_n Personen im Alter von n Jahren unter denselben Bedingungen versichern, so muß die Versicherungsanstalt im r-ten Jahre $l_{n+r-1} - l_{n+r}$ mal den Betrag K auszahlen, und diese Summe hat jetzt den Barwert $s_r = \frac{l_{n+r-1} - l_{n+r}}{q^r} \cdot K$. Die Summe dieser für die einzelnen Jahre berechneten Barwerte ist also $S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = \left(\frac{l_n - l_{n+1}}{q} + \frac{l_{n+1} - l_{n+2}}{q^2} + \frac{l_{n+2} - l_{n+3}}{q^3} + \ldots\right) \cdot K$

$$= \frac{K l_n}{q}\left(1 - \frac{l_{n+1}}{l_n} + \frac{l_{n+1}}{q\, l_n} - \frac{l_{n+2}}{q\, l_n} + \frac{l_{n+2}}{q^2 l_n} - \frac{l_{n+3}}{q^2 l_n} + \ldots\right)$$

$$= \frac{K l_n}{q}\left[1 + \left(\frac{l_{n+1}}{l_n \cdot q} + \frac{l_{n+2}}{l_n \cdot q^2} + \ldots\right) - q\left(\frac{l_{n+1}}{l_n \cdot q} + \frac{l_{n+2}}{l_n q^2} + \frac{l_{n+3}}{l_n q^3} + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{K l_n}{q}[1 + r_n - q\, r_n] = \frac{K l_n}{q}[1 - (q-1)\, r_n]$$

und diese wird von l_n Personen entrichtet, von denen jede den Betrag M erlegt. Aus der Gleichung $M \cdot l_n = \frac{K l_n}{q}[1 - (q-1)\, r_n]$ folgt aber $M = [1 - (q-1)\, r_n]\frac{K}{q}$.

Wenn der sich Versichernde jährlich eine bestimmte Prämie P entrichtet, um seinen Erben unmittelbar nach seinem Tode die Summe K auszahlen zu lassen, so beläuft sich der Barwert der jährlichen Einnahmen der Versicherungsanstalt bei l_n für dieselbe Summe versicherten Personen auf $P' = P \cdot l_n + P \cdot \frac{l_{n+1}}{q} + P\frac{l_{n+2}}{q^2} + \ldots$ $= P\, l_n\left(1 + \frac{l_{n+1}}{l_n q} + \frac{l_{n+2}}{l_n q^2} + \ldots\right) = P\, l_n(1 + r_n)$, während die jährlich auszuzahlenden Beträge, wie wir früher gesehen haben, durch die Formel $\frac{K l_n}{q}[1 - (q-1)\, r_n]$ darstellen lassen. Aus der Gleichstellung dieser beiden Ausdrücke ergibt sich für P die Formel $P = \frac{K}{q(1 + r_n)}[1 - (q-1)\, r_n]$.

Alle in diesen und ähnlichen Fällen zu leistenden Zahlungen werden in den Versicherungsämtern gewöhnlich nur nach Tabellen berechnet, welche auf Grund dieser Formeln zusammengestellt wurden.

Schlußwort.

Die vorliegende Darstellung unterscheidet sich von den älteren Behandlungsformen hauptsächlich durch die breitere Erörterung der grundlegenden Probleme, durch die historisch-genetische Behandlung des Rechnungsmechanismus und durch die Vermeidung der Tendenz, alle diese Aufgaben bis zu den äußersten Grenzen zu verfolgen, die man allenfalls mit den bestbegabten Schülern noch erreichen kann.

Nur der Umstand, daß man die Begriffsbildung zugunsten der rein formellen Durchführung in den Hintergrund sinken ließ, brachte die Mathematik in den Ruf, eine „trockene" Wissenschaft zu sein, und sie gilt auch nur deshalb als „schwer", weil die Grenzen der den praktischen Bedürfnissen entsprechenden Forderungen vielfach überschritten werden. Solange wir uns aber in der Umgebung von Vorstellungen bewegen, die uns vom Alltagsleben her geläufig sind, vollziehen sich die Abstraktionen mit großer Leichtigkeit. Eine allzu knappe Darstellung der ihnen nahestehenden Grundprobleme verleitet den Lehrer nur zu leicht, in ausschließlicher Begleitung der bestveranlagten Schüler in schwierigere Gebiete vorzudringen, während die dafür weniger disponierten, aber auch nicht talentlosen Schüler nur mit dem Gefühl der Überbürdung oder gar nicht mehr folgen.

Wie weit man gehen könne, um allgemein anerkannten Forderungen gerecht zu werden und doch ein dem Durchschnittsschüler leicht zugängliches Maß einzuhalten, das ist eine heutzutage noch vielumstrittene Frage, die sich mit kategorischen Behauptungen nicht erledigen läßt. Darüber muß die Erfahrung entscheiden, diese setzt viele Versuche voraus und für diese Versuche muß ein reichliches Material zur Verfügung stehen.

Das vorliegende Buch ging aus dem Bestreben hervor, die Grundprobleme der reinen Mathematik in dem Umfang und in einer solchen Form vorzulegen, daß der damit vertraute Schüler für den Gesichtskreis des wissenschaftlich Gebildeten im allgemeinen ausreicht, ohne Fachmann zu sein, und daß er als angehender Fachmann darauf weiter bauen kann, ohne eine Revision der Grundlagen vornehmen zu müssen.

Berichtigungen.

Seite 38 Zeile 7 v. o. beidemal q_1 statt 1.

Seite 175 Zeile 17 v. u. $\frac{n!\,k!}{k!\,(n-k)!}$ statt $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten von Dr. **Hugo Fenkner,** Professor in Braunschweig. Mit einem Vorwort von Dr. **W. Krumme,** weil. Direktor der Oberrealschule in Braunschweig. — Erster Teil: Ebene Geometrie. 5. Aufl. Preis 2 Mk. 20 Pf. Zweiter Teil: Raumgeometrie. 3. Aufl. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Die Infinitesimalrechnung im Unterrichte der Prima. Bearbeitet von **Oskar Lesser,** Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 30 Figuren im Text. Preis Mk. 1.60.

Hilfsbuch für den geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von **Oskar Lesser,** Oberlehrer an der Klinger-Oberrealschule zu Frankfurt a. M. Mit 91 Fig. im Text. Preis 2 Mk.

Der Unterricht in der analyt. Geometrie. Für Lehrer und zum Selbstunterricht von Dr. **Wilhelm Krumme,** weil. Direktor der Oberrealschule zu Braunschweig. Mit 53 Figuren im Text. Preis 6 Mk. 50 Pf.

Die Gestaltung des Raumes. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Von Prof. **F. Pietzker.** Mit 10 Figuren. Preis 2 Mk.

Grundsätze und Schemata für den Rechenunterricht an höheren Schulen. Mit einem Anhange: Die periodischen Dezimalbrüche nebst Tabellen für dieselben. Von Dr. **Karl Bochow.** Preis 1 Mk. 20 Pf.

Arithmetische Aufgaben unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von Prof. Dr. **Hugo Fenkner.** Ausgabe A (für Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen): Teil I (Pensum der U III, O III, U II). 5. verbess. Aufl. Preis 2 Mk. 20 Pf. — Teil IIa (Pensum der O II). 3. verbess. Aufl. Preis 1 Mk. 20 Pf. — Teil IIb (Pensum der Prima). Preis 2 Mk. — Ausgabe B (für 6 klass. höh. Lehranstalten, Mittelschulen, Seminare, Fachschulen). 3. verbess. Aufl. Preis 1 Mk. 65 Pf. — Ausgabe C (für den Anfangsunterricht an mittleren Lehranstalten). Preis 1 Mk. 10 Pf.

Regeln der Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von Dr. **H. Servus,** Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium zu Berlin. Teil I (Pensum der U III, O III, U II). Preis 1 Mk. 40 Pf. — Teil II (Pensum der O II u. I). Preis 2 Mk. 40 Pf.

Leitfaden der Physik. Von Dr. **J. Heussi.** 16. verbesserte Auflage. Mit 199 in den Text gedruckten Holzschnitten. Bearbeitet von Prof. Dr. **Götting.** Preis 1 Mk. 50 Pf. — Mit Anhang „Elemente der Chemie". Preis 1 Mk. 80 Pf.

Lehrbuch der Physik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Bildungsanstalten. Von Dr. **J. Heussi.** 7. verbesserte Auflage. Mit zahlreichen Holzschnitten. Bearbeitet von Prof. Dr. **Götting.** Preis 5 Mk. (Erscheint Anfang 1907.)

Physikalische Apparate und Versuche einfacher Art aus dem Schäffermuseum. Mit 216 Abbildungen im Text. Von Oberlehrer **H. Bohn.** Preis 2 Mk.

Physikalische Freihandversuche. Unter Benutzung des Nachlasses von Prof. Dr. B. Schwalbe. Zusammengestellt u. bearbeitet von **Herm. Hahn,** Oberlehrer am Dorotheenstädt. Realgymnasium zu Berlin. Teil I: Nützliche Winke, Maß u. Messen, Mechanik der festen Körper. Mit 269 Abbildungen. Preis geh. 3 Mk., geb. 3 Mk. 75 Pf.

Technik des physikalischen Unterrichts nebst Einführung in die Chemie. Von Dr. **Friedrich C. G. Müller,** Professor am von Saldern'schen Realgymnasium zu Brandenburg a. H. Mit 251 Abbildungen. Preis geh. 6 Mk., geb. 7 Mk.

Method. Leitfaden für den Anfangs-Unterricht in der Chemie unter Berücksichtigung der Mineralogie. Von Prof. Dr. **Wilh. Levin.** 4. verbesserte Auflage. Mit 98 Abbildungen. Preis 2 Mk.

Method. Lehrbuch der Chemie und Mineralogie für Realgymnasien und Oberrealschulen. Von Prof. Dr. **Wilh. Levin.** Teil I: Unterstufe (Sekunda des Realgymnasiums, Untersekunda der Oberrealschule). Mit 72 Abbildungen. Preis 1 Mk. 40 Pf. Teil II: Oberstufe (Pensum der Obersekunda und Prima). Mit 113 Abbildungen. Preis 2 Mk. 40 Pf.

Der Beobachtungs-Unterricht in Naturwissenschaft, Erdkunde und Zeichnen an höheren Lehranstalten, besonders als Unterricht im Freien. Von Oberlehrer **H. Lüddecke.** Mit Vorwort von Direktor Dr. **Hermann Schiller.** Preis 2 Mk. 40 Pf.

Für Schüler-Bibliotheken sehr empfohlen:

Die Erde und die Erscheinungen ihrer Oberfläche nach **E. Reclus** von Dr. **Otto Ule.** 2. umgearbeitete Auflage von Dr. **Willi Ule.** Mit 15 Karten, 5 Vollbildern und 157 Textabbildungen. Preis 10 Mk.; geb. 12 Mk.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.